

## PANDEO DE PLACAS MULTICAPAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS

Carnicer, Roberto S., Desía Braian A., Schwarz Rodolfo A.  
Facultad de Ingeniería, Universidad de Belgrano, Ciudad Autónoma de Buenos Aires,  
Argentina.

*rcarnicer@freyreyasoc.com.ar, b.desia@hotmail.com.ar,  
rodolfo.schwarz@comunidad.ub.edu.ar.*

### RESUMEN

Se presenta un análisis de pandeo de placas multicapas mediante el método de los elementos finitos con incógnitas mixtas (desplazamientos y rotaciones, y tensiones transversales interlaminares). En el modelo mixto, cada capa es analizada como una placa simple, donde la continuidad de desplazamientos es asegurada mediante Multiplicadores de Lagrange que representan las variables estáticas. Este procedimiento es de fácil implementación desde el punto de vista computacional. Una metodología para resolver el problema de autovalores es presentada basada en el Método de Iteración Inversa. El modelo es verificado satisfactoriamente con los resultados obtenidos por otros autores.

### ABSTRACT

*It is presented a buckling analysis of multilayered plates by the finite elements method with mixed unknowns (displacement and rotations, and transverse interlaminar stresses). In the mixed model, each layer is analyzed as a single plate, where the continuity of displacement is ensured by Lagrange Multipliers which represent static variables. This procedure is easy to be implemented from the computational point of view. A methodology to solve the eigenproblem is presented based on the Inverse Iteration Method. The model is verified successfully with results obtained by other authors.*

## INTRODUCCIÓN

Los materiales compuestos avanzados son ampliamente usados en muchas ramas de la ingeniería tales como la ingeniería civil, la ingeniería naval y la ingeniería aeroespacial debido a su alta relación resistencia-peso, excelente resistencia a la corrosión, buen comportamiento a la fatiga y otras propiedades superiores respecto a los materiales convencionales.

Dentro de los diferentes tipos de materiales compuestos, los laminados resultan los más populares debido a su variedad de aplicaciones estructurales en situaciones que se requiere elevada resistencia membranal y a la flexión. Los laminados compuestos son, básicamente, placas formadas por varias láminas que se encuentran perfectamente unidas entre sí, presentando una conducta anisótropa. Cada lámina es compuesta por fibras embebidas en una matriz. Estas fibras le confieren altas propiedades mecánicas a la lámina en la dirección de la fibra, mientras que la matriz las mantiene ligadas. Las láminas se ubican una sobre otras orientadas de acuerdo a los requerimientos de diseño, a fin de optimizar el uso del material. Su creciente empleo demanda el desarrollo de métodos numéricos eficientes y precisos para predecir adecuadamente el complejo comportamiento de los mismos.

En el presente artículo, se propone una solución, basada en un modelo por capas, para la determinación de la carga crítica de pandeo a partir de elementos finitos con variables mixtas (cinemáticas y estáticas).

## FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Sea una placa compuesta de  $n$  capas de altura  $h_i$ , perfectamente ligadas y cuyas propiedades mecánicas pueden diferir, se define un sistema particular de coordenadas Cartesianas  $\{z^\alpha, \alpha = 1,2,3\}$  para cada capa en su respectiva superficie media  $\Omega_i$ , donde  $(z^1, z^2)$  son las coordenadas en el plano,  $(z^3)$  es la coordenada transversal. La cara superior de cada una se ubica en  $z^3 = -h_i/2$  y la inferior, en  $z^3 = +h_i/2$ .

La cinemática de cada capa es modelada independientemente adoptando la teoría de deformación por corte de primer orden (FSDT, *First-order Shear Deformation Theory*). De este modo, el campo de desplazamientos de un punto  $\{z^\alpha\}$  de una capa genérica  $i$  está dado por,

$$\begin{aligned} u_1(z^1, z^2, z^3) &= u_{o1}(z^1, z^2) - z^3 \beta_1(z^1, z^2) \\ u_2(z^1, z^2, z^3) &= u_{o2}(z^1, z^2) - z^3 \beta_2(z^1, z^2) \\ u_3(z^1, z^2, z^3) &= w(z^1, z^2) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{u} = [u_{o1}, u_{o2}]^T$  son desplazamientos axiales en la superficie media de la capa,  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2]^T$  son rotaciones de la normal transversal (asumida inextensible) alrededor de los ejes  $z^2, z^1$ , respectivamente, y  $w$  es el desplazamientos transversal constante en el espesor.

El comportamiento conjunto de las láminas que conforman el sistema multicapas supone necesariamente la continuidad de desplazamientos entre capas adyacentes (Figura 1), para lo cual se impone,

1. Los desplazamientos en el plano de las fibras inferiores de la capa superior  $i$  deben ser iguales a los de las fibras superiores de la placa inferior  $i + 1$ ,

$$\begin{aligned} u_1^{(i)}\left(z^1, z^2, +\frac{h_i}{2}\right) &= u_1^{(i+1)}\left(z^1, z^2, -\frac{h_{i+1}}{2}\right) \\ u_2^{(i)}\left(z^1, z^2, +\frac{h_i}{2}\right) &= u_2^{(i+1)}\left(z^1, z^2, -\frac{h_{i+1}}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

2. Los desplazamientos transversales en la capa superior  $i$  deben ser los mismos a los de la placa inferior  $i + 1$ ,

$$w^{(i)}(z^1, z^2) = w^{(i+1)}(z^1, z^2) \quad (3)$$

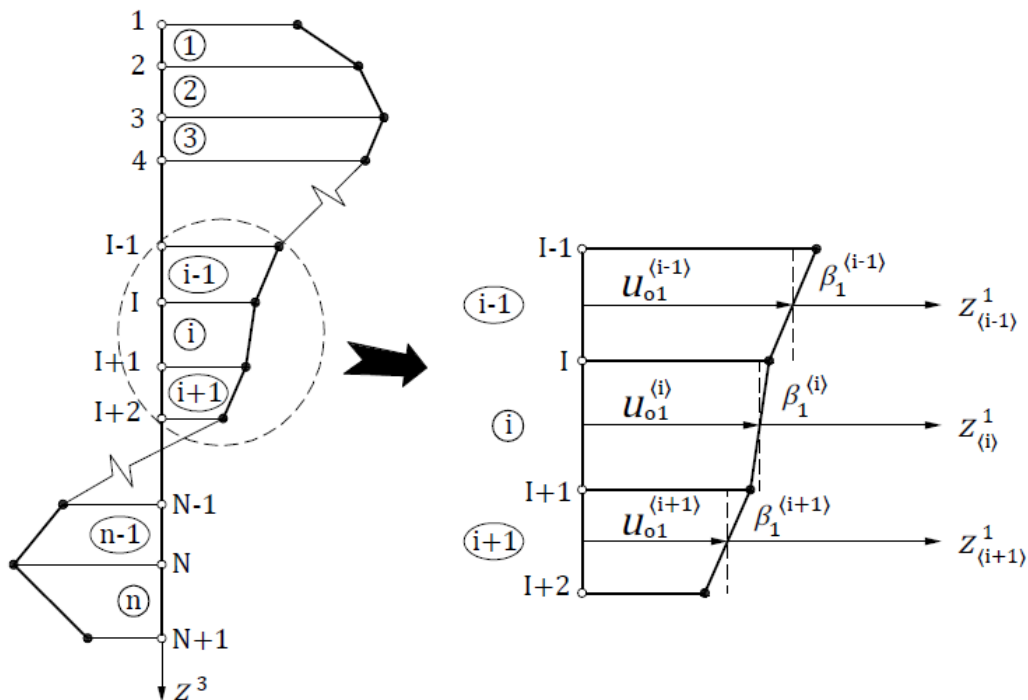


Figura 1: Campo de desplazamientos a través del espesor de la placa multicapas.

El funcional de la energía potencial total del sistema multicapas es presentado como una superposición de  $n$  placas simples donde las restricciones cinemáticas son aseguradas matemáticamente a partir de la incorporación de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^{(j)} = [\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}]^T$  y  $\mu^{(j)}$  que representan las variables estáticas en la interfaz  $j$  (tensiones transversales interlaminares),

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} h_i a(\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}) + \frac{1}{2} \frac{h_i^3}{12} a(\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} h_i b(\nabla w^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)}, \nabla w^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)}) - W_{ext}^{(i)} \right\} + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \int_{S^{(j+1)}} \boldsymbol{\lambda}^{(j+1)T} \cdot \left[ \left( \mathbf{u}^{(j)} - \frac{h_i}{2} \boldsymbol{\beta}^{(j)} \right) - \left( \mathbf{u}^{(j+1)} + \frac{h_i}{2} \boldsymbol{\beta}^{(j+1)} \right) \right] d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{S^{(j+1)}} (w^{(j)} - w^{(j+1)}) \mu^{(j+1)} d\Omega \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

donde  $a(\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)})$  y  $a(\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i)})$  representan la energía membranal y por flexión de cada capa, respectivamente, mientras que  $b(\nabla w^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)}, \nabla w^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)})$  constituye la energía de deformación por corte. El trabajo de las fuerzas externas en cada capa es designado como  $W_{ext}^{(i)}$ . Se considera solamente el trabajo de las fuerzas en el plano debido a la deflexión transversal,

$$W_{ext}^{(i)} = \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} \nabla w^{(i)T} \cdot \mathbf{N}^{(i)} \cdot \nabla w^{(i)} d\Omega \quad (5)$$

con,

$$\mathbf{N}^{(i)} = \begin{bmatrix} \eta_{11}^{(i)} N_{11} & \eta_{12}^{(i)} N_{12} \\ \eta_{22}^{(i)} N_{22} & \eta_{22}^{(i)} N_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\nabla w^{(i)} = [w_{,1}^{(i)} \quad w_{,2}^{(i)}]^T \quad (7)$$

donde  $(N_{11}, N_{22})$  y  $N_{12}$  simbolizan las fuerzas axiales y de corte en el plano, respectivamente. El coeficiente  $\eta_{\alpha\gamma}^{(i)}$  ( $\alpha, \gamma = 1, 2$ ) relaciona la carga de pandeo global de la placa con la de cada lámina (ver Apéndice A). La coma indica la derivada parcial respecto de la posición en el espacio.

La justificación física de los multiplicadores de Lagrange es dada por Alliney y Carnicer<sup>1</sup>, y Carnicer *et. al.*<sup>2</sup>.

## DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Las ecuaciones que gobiernan el problema se obtienen tomando la variación del funcional (4),

$$\delta \mathbf{u}^{(i)} : \quad h_i a(\mathbf{u}^{(i)}, \delta \mathbf{u}^{(i)}) - \int \delta \mathbf{u}^{(i)T} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(i)} d\Omega + \int \delta \mathbf{u}^{(i)T} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(i+1)} d\Omega = 0 \quad (8)$$

$$\delta w^{(i)} : \quad h_i b(\nabla w^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)}, \delta \nabla w^{(i)}) - \int_{\Omega_i} \delta w^{(i)} \mu^{(i)} d\Omega + \int_{\Omega_i} \delta w^{(i+1)} \mu^{(i+1)} d\Omega - \int_{\Omega_i} \delta \nabla w^{(i)T} \cdot \mathbf{N}^{(i)} \cdot \nabla w^{(i)} d\Omega = 0 \quad (9)$$

$$\delta \boldsymbol{\beta}^{(i)} : \quad \frac{h_i^3}{12} a(\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \delta \boldsymbol{\beta}^{(i)}) + h_i b(\nabla w^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)}, -\delta \boldsymbol{\beta}^{(i)}) + \int_{\Omega_i} \frac{h_i}{2} \delta \boldsymbol{\beta}^{(i)T} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(i)} d\Omega - \int_{\Omega_i} \frac{h_i}{2} \delta \boldsymbol{\beta}^{(i)T} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(i)} d\Omega = 0 \quad (10)$$

$$\delta \boldsymbol{\lambda}^{(j)} : \quad \int_{S^{(j+1)}} \delta \boldsymbol{\lambda}^{(j+1)T} \cdot \left[ \left( \mathbf{u}^{(j)} - \frac{h_i}{2} \boldsymbol{\beta}^{(j)} \right) - \left( \mathbf{u}^{(j+1)} + \frac{h_i}{2} \boldsymbol{\beta}^{(j+1)} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (11)$$

$$\delta \mu^{(j)} : \quad \int_{S^{(j+1)}} (w^{(j)} - w^{(j+1)}) \delta \mu^{(j+1)} d\Omega = 0 \quad (12)$$

donde  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 2, \dots, n$ . La letra griega  $\delta$  simboliza el operador variacional.

Las variables cinemáticas requieren continuidad  $C^0$  al aparecer sólo sus primeras derivadas en las expresiones (8)-(12), mientras que las variables pueden ser discontinuas (Continuidad  $C^{-1}$ ) No obstante, se utiliza la misma interpolación para todas las incógnitas por simplicidad.

Usando elementos finitos isoparamétricos<sup>3</sup>,

$$(\mathbf{u}^{(i)}, w^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}^{(j)}, \mu^{(j)}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{NN} N_k (\hat{\mathbf{u}}^{k(i)}, \hat{w}^{k(i)}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{k(i)}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{k(j)}, \hat{\mu}^{k(j)}, \hat{\mathbf{z}}_k) \quad (13)$$

donde  $NN$  representa el número de nodos del elemento y  $N_k$  son las funciones de interpolación asociadas al nodo  $k$ . La tilde circunfleja ( $\hat{\phantom{x}}$ ) indica variable nodal.

Incorporando (13) en las expresiones (8)-(12) se obtiene el modelo de elementos finitos,

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)T} \cdot [\mathbf{A}_m^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(i)} - \mathbf{B}_i^{(i+1)} \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(i+1)} + \mathbf{B}_i^{(i)} \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(i)}] = 0 \quad (14)$$

$$\delta \hat{w}^{(i)T} \cdot [\mathbf{G}^{(i)} \cdot \hat{w}^{(i)} - \mathbf{E}^{(i)T} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} - \mathbf{H}_i^{(i)} \cdot \hat{\mu}^{(i)} - \mathbf{H}_i^{(i+1)} \cdot \hat{\mu}^{(i+1)} - \Lambda \mathbf{k}_g^{(i)} \cdot \hat{w}^{(i)}] = 0 \quad (15)$$

$$\delta \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)T} \cdot [\mathbf{A}_b^{(i)} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} - \mathbf{E}^{(i)} \cdot \hat{w}^{(i)} + \mathbf{D}^{(i)} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} - \mathbf{C}_i^{(i)} \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(i)} - \mathbf{C}_i^{(i+1)} \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(i+1)}] = 0 \quad (16)$$

$$\delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(j)T} \cdot [\mathbf{B}_{j-1}^{(j)T} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(j-1)} - \mathbf{C}_{j-1}^{(j)T} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j-1)} - \mathbf{B}_j^{(j)T} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(j)} - \mathbf{C}_j^{(j)T} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j)}] = 0 \quad (17)$$

$$\delta \hat{\mu}^{(j)T} \cdot [\mathbf{H}_{j-1}^{(j)T} \hat{w}^{(j-1)} - \mathbf{H}_j^{(j)T} \hat{w}^{(j)}] = 0 \quad (18)$$

Para un sistema de 3 capas, la representación matricial en forma compacta se presenta a continuación,

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{Q}_{12}^T & & & & \\ \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22}^T & \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{Q}_{23}^T & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{33}^T & & \\ & & \mathbf{Q}_{33} & \mathbf{C}_{33} & & \\ \hline & & & & \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{33} \end{array} \right) \cdot \begin{array}{l} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \hat{\lambda}_3 \\ \hat{\mathbf{x}}_3 \end{array} = \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \quad (19)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}_i$  son las variables cinemáticas nodales,  $\hat{\lambda}_i$  son las variables estáticas nodales,  $(\mathbf{C}_{ii}, \mathbf{G}_{ii})$  son los aportes de rigidez mecánica y geométrica de cada capa, respectivamente, y  $(\mathbf{Q}_{ii}, \mathbf{Q}_{ij})$  son las matrices resultantes del problema de restricción Lagrangeana. El factor  $\Lambda$  es el parámetro de carga crítica de pandeo, definido como,

$$\Lambda = \frac{N_{cr}}{N_{11}} = \frac{N_{cr}}{N_{22}} = \frac{N_{cr}}{N_{12}} \quad (20)$$

La solución no trivial de (19) requiere que

$$\det(\mathbf{K} - \Lambda \mathbf{K}_G) = 0 \quad (21)$$

posteriormente impuestas las condiciones de borde.

## RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE AUTOVALORES

Como es característico de las formulaciones mixtas, la matriz de rigidez mecánica no es definida positiva, así como tampoco lo es la matriz de rigidez geométrica. Además, el número de incógnitas aumenta rápidamente conforme se agregan más capas al modelo, por lo que la determinación del problema de autovalores resulta dificultosa. En esta sección, se propone una metodología simple de resolución del problema en base al Método de Iteración Inversa<sup>4</sup>.

El procedimiento consiste en establecer inicialmente un vector de prueba. Posteriormente, se evalúa el término que involucra a la matriz de rigidez geométrica. Dado que los vectores propios sólo pueden ser determinados dentro de un factor de escala, la elección de  $\Lambda$  no afecta el resultado, por lo cual se asume  $\Lambda = 1$ . De esta forma, se obtiene el vector de cargas equivalentes expuesto en (22).

$$\begin{vmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{1,k} \\ \hat{\lambda}_{2,k} \\ \hat{\mathbf{x}}_{2,k} \\ \hat{\lambda}_{3,k} \\ \hat{\mathbf{x}}_{3,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{G}_{11} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{1,k} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{22} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{2,k} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{33} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{3,k} \end{vmatrix} \quad (22)$$

Dado que el vector inicial se establece arbitrariamente, en general no se cumple (19) (si se satisface, el vector de prueba es un autovector), por lo que se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{Q}_{12}^T & & \\ \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22}^T & \mathbf{0} \\ & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{Q}_{23}^T \\ & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{33}^T \\ & & & \mathbf{Q}_{33} & \mathbf{C}_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{1,k+1} \\ \hat{\lambda}_{2,k+1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{2,k+1} \\ \hat{\lambda}_{3,k+1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{3,k+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{G}_{11} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{1,k} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{22} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{2,k} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{33} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{3,k} \end{vmatrix} \quad (23)$$

A partir de (23), se plantea,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{11} \hat{\mathbf{x}}_{1,k+1} &= \mathbf{G}_{11} \hat{\mathbf{x}}_{1,k} - \mathbf{Q}_{12}^T \hat{\lambda}_{2,k+1} \\ \mathbf{C}_{22} \hat{\mathbf{x}}_{2,k+1} &= \mathbf{G}_{22} \hat{\mathbf{x}}_{2,k} - \mathbf{Q}_{22} \hat{\lambda}_{2,k+1} - \mathbf{Q}_{23}^T \hat{\lambda}_{3,k+1} \\ \mathbf{C}_{33} \hat{\mathbf{x}}_{3,k+1} &= \mathbf{G}_{33} \hat{\mathbf{x}}_{3,k} - \mathbf{Q}_{33} \hat{\lambda}_{3,k+1} \end{aligned} \quad (24)$$

Reemplazando los desplazamientos en las ecuaciones restantes, se obtiene la matriz reducida que se muestra en (25).

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{C}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T + \mathbf{Q}_{22}^T \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{22}^T \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{23}^T \\ \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{23}^T + \mathbf{Q}_{33}^T \cdot \mathbf{C}_{33}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\lambda}_{2,k+1} \\ \hat{\lambda}_{3,k+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{C}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{11} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{1,k} - \mathbf{Q}_{22}^T \cdot \mathbf{C}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{22} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{2,k} \\ \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{22} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{2,k} - \mathbf{Q}_{33}^T \cdot \mathbf{C}_{33}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{33} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{3,k} \end{vmatrix} \quad (25)$$

Así, las variables cinemáticas se determinan a partir de las variables estáticas, resolviéndose el “problema mixto”.

La condición suficiente pero no necesaria para resolver el sistema (25) resulta,

$$n_{x_i} \geq n_{\lambda_i} \quad (26)$$

donde  $n_{x_i}$  y  $n_{\lambda_i}$  son los números de grados de libertad de la variables correspondientes<sup>5</sup>.

El correspondiente autovalor se computa aplicando el Cociente de Rayleigh,

$$\Lambda_{k+1} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{x}_{i,k+1}^T \cdot \mathbf{G}_{ii} \cdot \hat{x}_{i,k}}{\hat{x}_{i,k+1}^T \cdot \mathbf{G}_{ii} \cdot \hat{x}_{i,k+1}} \quad (27)$$

Luego, se normaliza el vector resultante de manera que el nuevo vector cumpla,

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_{i,k+1}^T \cdot \mathbf{G}_{ii} \cdot \hat{x}_{i,k+1} = 1 \quad (28)$$

La normalización mantiene los elementos del vector con valores similares durante cada iteración. Si no se realiza, los valores de los elementos crecen y decrecen en cada paso, pudiendo ocasionar problemas numéricos.

La comprobación de la convergencia se especifica comparando dos valores sucesivos del autovalor,

$$\left| \frac{\Lambda_{k+1} - \Lambda_k}{\Lambda_{k+1}} \right| \leq \text{tolerancia} \quad (29)$$

Si el criterio de convergencia no se satisface, se comienza una nueva iteración utilizando como vector de prueba aquel obtenido al resolver el sistema (23). El procedimiento se repite hasta alcanzar la convergencia establecida. A medida que se incrementa el número de iteraciones, se tiende al autovalor y autovector más bajo.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

A partir del modelo presentado, se implementa un código en el programa GNU Octave para la determinación de cargas críticas de pandeo de placas compuestas. Se estudian los efectos del material y de la relación espesor/lado en la carga de colapso. Además, se presenta la variación a través del espesor de las tensiones transversales asociadas al modo de pandeo.

Las placas analizadas presentan una geometría rectangular con dimensiones  $a, b$  coincidentes con las direcciones  $x, y$  respectivamente (Ver Figura 2). En todos los ejemplos, por razones de simetría, se modela sólo un cuarto de placa con una malla de  $6 \times 6$  elementos cuadriláteros isoparamétricos de cuatro nodos con interpolación lineal. La evaluación numérica de las integrales se lleva a cabo a partir del método de cuadratura de Gauss, empleándose  $2 \times 2$  puntos para los términos de membrana, flexión, mientras que  $1 \times 1$  puntos para los referidos al corte y rigidez geométrica. La tolerancia para aceptar la solución en el problema de autovalores fue establecida en  $1e-6$ .

Las condiciones de borde empleadas son:

$$\begin{aligned}
 (x, 0): & \quad w = u_{ox} = \beta_x = 0 \\
 (0, y): & \quad w = u_{oy} = \beta_y = 0 \\
 (x, b/2): & \quad u_{oy} = \beta_y = 0 \\
 (a/2, y): & \quad u_{ox} = \beta_x = 0
 \end{aligned} \tag{30}$$

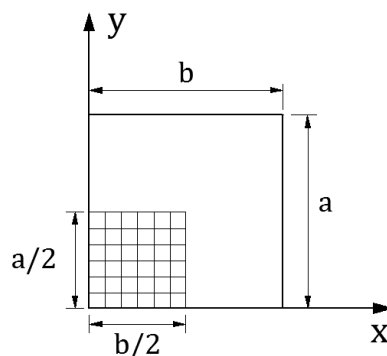


Figura 2: Representación de la placa y malla típica empleada.

Las propiedades elásticas de los materiales son:

$$\frac{G_{23}}{E_2} = 0.6 \quad \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5 \quad \nu_{12} = 0.25 \tag{31}$$

donde la relación  $E_1/E_2$  se especifica para cada ejemplo en particular. El valor de  $E_2$  es arbitrario por la adimensionalización utilizada,

$$\bar{N}_{cr} = \Lambda N \frac{a^2}{E_2 h^3} \tag{32}$$

La Tabla 1 muestra la carga crítica uni-axial de pandeo para una placa cuadrada

laminada ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) con una relación espesor/lado  $h/a=0.10$  y diferentes relaciones  $E_1/E_2$ . Los resultados obtenidos se contrastan con la solución de la Elasticidad 3D<sup>5</sup>, notándose una excelente correlación. Se nota que a medida que se aumenta el número de capas de cálculo, la solución presentada se refina como consecuencia directa de computar de manera más realista la energía de deformación por corte a través del espesor, que se asumen constante en cada capa.

El efecto de la relación espesor/lado en la carga crítica de pandeo se estudia en la Tabla 2. Se analiza una placa cuadrada laminada ( $0^\circ/90^\circ$ ) con una relación  $E_1/E_2=40$  bajo carga uni-axial. Cada lámina individual se discretizó en cuatro *layers* de cálculo. Los resultados son comparados con los de otros autores.

Referencia	Discretización del espesor	Relación $E_1/E_2$				
		3	10	20	30	40
Actual	3 <i>layers</i>	5.4972	10.0842	15.3656	19.5699	23.0107
	9 <i>layers</i>	5.4720	9.9811	15.1017	19.1299	22.3981
	15 <i>layers</i>	5.4698	9.9720	15.0782	19.0902	22.3418
Noor (1975) <sup>6</sup>		5.3044	9.7621	15.0191	19.3040	22.8807
Singh <i>et. al.</i> <sup>7</sup>		5.2284	9.6259	14.6458	18.6158	21.8527
Reddy & Pan <sup>8</sup>		5.3933	9.9406	15.2980	19.6740	22.3400

Tabla 1: Efecto del grado de ortotropía de las láminas individuales en la carga crítica uni-axial de pandeo de una placa cuadrada laminada ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), simplemente apoyada con  $h/a=0.10$ .

Relación $h/a$	Singh <i>et. al.</i> <sup>7</sup>	Reddy & Pan <sup>8</sup>	Van <i>et. al.</i> <sup>9</sup>	Chakrabarti & Sheikh <sup>10</sup>	Actual
0.10	11.310	11.563	11.360	11.349	11.275
0.05	12.427	12.577	12.551	12.510	12.642
0.02	12.800	12.895	12.906	12.879	13.091
0.01	12.873	12.942	13.039	12.934	13.158

Tabla 2: Carga crítica uni-axial para una placa cuadrada laminada ( $0^\circ/90^\circ$ ), simplemente apoyada variando  $h/a$ .

Finalmente, se evidencia el sentido físico de los multiplicadores de Lagrange. Se representa la variación a lo largo del espesor de las tensiones interlaminares transversales asociadas al modo de falla en la Figura 3 para la placa del primer ejemplo con relación  $E_1/E_2=40$ , mientras que en la Figura 4 para la placa del segundo caso con relación  $h/a=0.10$ . Los valores obtenidos son divididos por su máximo valor absoluto. La distribución obtenida resulta acorde a lo esperable, cumpliéndose las condiciones de contorno en los bordes superior e inferior.

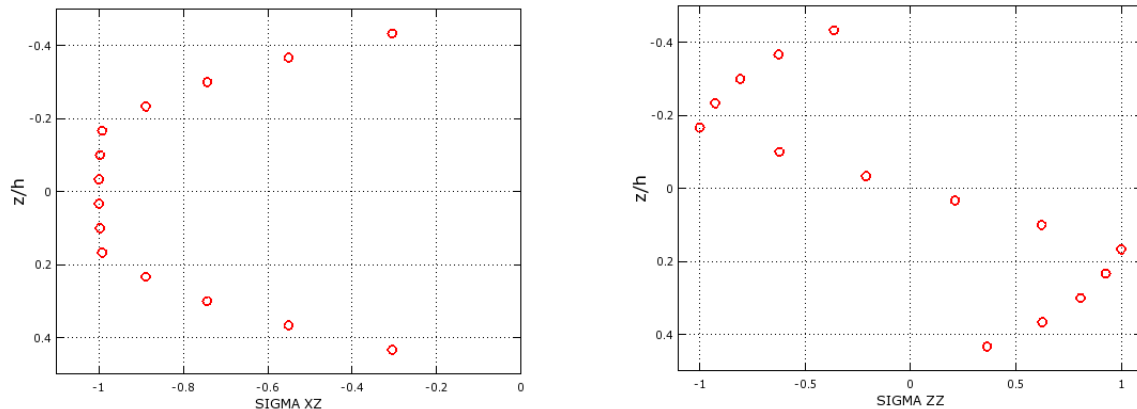


Figura 3: Variación a través del espesor de la tensión de corte transversal  $\bar{\sigma}_{13}(0, \frac{b}{2}, \bar{z}^3)$  y la tensión transversal normal  $\bar{\sigma}_{33}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}^3)$  normalizadas para una placa cuadrada laminada ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) simplemente apoyada ( $h/a = 0.10 - E_1/E_2 = 40 - 15$  layers).

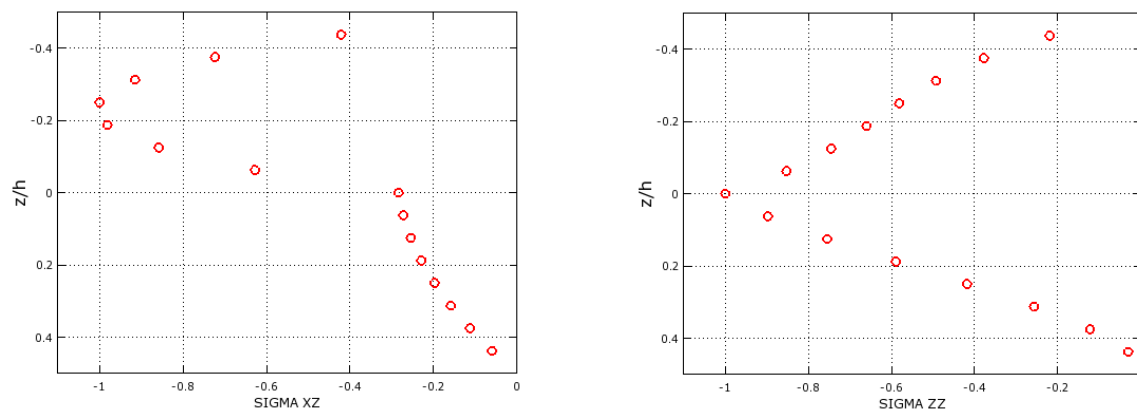


Figura 4: Distribución en el espesor de la tensión de corte transversal  $\bar{\sigma}_{13}(0, \frac{b}{2}, \bar{z}^3)$  y la tensión transversal normal  $\bar{\sigma}_{33}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}^3)$  normalizadas para una placa cuadrada laminada ( $0^\circ/90^\circ$ ) simplemente apoyada ( $h/a = 0.10 - E_1/E_2 = 40 - 16$  layers).

## CONCLUSIONES

Se presenta un modelo de elementos finitos mixtos para determinar la carga crítica de pandeo de placas multicapas. La continuidad de los desplazamientos así como de las tensiones transversales es asegurada a lo largo del espesor de la placa a partir de la inclusión de multiplicadores de Lagrange. La formulación mixta permite evaluar directamente las tensiones transversales sin necesidad de integrar las ecuaciones de equilibrio que conllevan pérdidas de precisión, resultando un punto de gran interés en el estudio de la respuesta de laminados compuestos. Se implementa una metodología a partir del Método de Iteración Inversa para resolver el problema de autovalores con resultados satisfactorios. La precisión del modelo es demostrada a lo largo de una serie de problemas donde los resultados hallados se asemejan a

los disponibles en la bibliografía.

## REFERENCIAS

- [1] Alliney, S. & Carnicer, R. S., 1992. A hybrid finite element model for multilayered plates. *Computational Mechanics*, 10(5), pp. 319-333.
- [2] Carnicer R. S., Desía B. A., Schwarz, R. A. & Pan, Q., 2012. Análisis de placas multicapas mediante un modelo de elementos finitos híbrido. *Mecánica Computacional*, XXXI, pp. 857-874.
- [3] Bathe, K. J., 1996. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- [4] Chopra, A. K., 1996. *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall, pp. 392-405.
- [5] Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., 1994. *El Método de los Elementos Finitos: formulaciones básicas y problemas lineales*. McGraw Hill, pp. 333-387.
- [6] Noor A. K., 1975. Stability of multilayered composite plates. *Fibre Science and Technology*, 8(2), pp. 81-89.
- [7] Singh S. K. & Chakrabarti A., 2012. Buckling analysis of laminated composite plates using an efficient  $C^0$  FE model. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 9, pp. 353-365.
- [8] Reddy J. N. & Phan N. D., 1985. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory. *Journal of Sound and Vibrations*, 98(2), pp. 157-170.
- [9] Nguayen-Van H., Mai-Duy N., Karanasena W., & Tran-Cong T., 2011. Buckling and vibration analysis of laminated composite plate/shell structures via a smoothed flat shell element with in-plane rotations. *Composite Structures*, 89, pp. 612-625.
- [10] Chakrabarti A. & Sheikh H., 2003. Buckling of laminated composite plates by a new element based on higher order shear deformation theory. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 10(4), pp. 303-317.

## APÉNDICE A: COEFICIENTES DE PANDEO

Al modelarse cada capa en forma independiente, resulta necesario distribuir la carga crítica de pandeo de la placa en las diferentes capas. A los efectos, se considera al conjunto de capas como un sistema de resortes en paralelo (ver Figura 5).

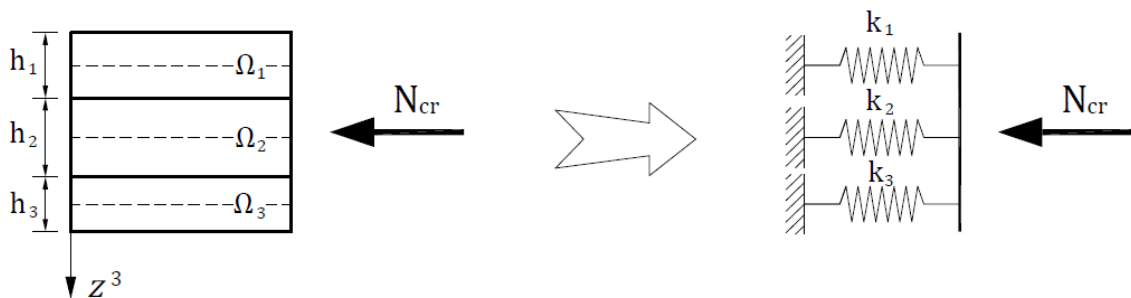


Figura 5: Distribución de la carga por capas. Analogía con resortes en paralelo.

Para una capa genérica se tiene,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^o &= \frac{1}{h} (s_{11} N_{11} + s_{12} N_{22} + s_{16} N_{12}) \\ \varepsilon_{22}^o &= \frac{1}{h} (s_{12} N_{11} + s_{22} N_{22} + s_{26} N_{12}) \\ \varepsilon_{12}^o &= \frac{1}{h} (s_{16} N_{11} + s_{26} N_{22} + s_{66} N_{12})\end{aligned}\quad (33)$$

donde  $(\varepsilon_{11}^o, \varepsilon_{22}^o, \varepsilon_{12}^o)$  son las deformaciones membranales en el plano de cada capa, mientras que  $s_{\alpha\gamma}$  ( $\alpha, \gamma = 1, 2, 6$ ) son los coeficientes de la matriz inversa de coeficientes elásticos.

De la expresión (33) se plantea,

$$\begin{aligned}N_{11} &= \frac{h}{s_{11} + a_{11} s_{12} + b_{11} s_{16}} \varepsilon_{11}^o \\ N_{22} &= \frac{h}{a_{22} s_{12} + s_{22} + b_{22} s_{26}} \varepsilon_{22}^o \\ N_{12} &= \frac{h}{a_{12} s_{16} + b_{12} s_{26} + s_{66}} \varepsilon_{12}^o\end{aligned}\quad (34)$$

donde,

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{N_{22}}{N_{11}} & b_{11} &= \frac{N_{12}}{N_{11}} \\ a_{22} &= \frac{N_{11}}{N_{22}} & b_{22} &= \frac{N_{12}}{N_{22}} \\ a_{12} &= \frac{N_{11}}{N_{12}} & b_{12} &= \frac{N_{22}}{N_{12}}\end{aligned}\quad (35)$$

Partiendo de que los resortes (capas) sufren la misma deformación, después de

algo de algebra, se obtiene,

$$\begin{aligned}
 \eta_{11}^{(i)} &= \frac{N_{11}^{(i)}}{N_{11}} = \frac{h_i}{s_{11}^{(i)} + a_{11}^{(i)} s_{12}^{(i)} + b_{11}^{(i)} s_{16}^{(i)}} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{s_{11}^{(i)} + a_{11}^{(i)} s_{12}^{(i)} + b_{11}^{(i)} s_{16}^{(i)}}{h_i} \right\} \\
 \eta_{22}^{(i)} &= \frac{N_{22}^{(i)}}{N_{22}} = \frac{h_i}{a_{22}^{(i)} s_{12}^{(i)} + s_{22}^{(i)} + b_{22}^{(i)} s_{26}^{(i)}} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{a_{22}^{(i)} s_{12}^{(i)} + s_{22}^{(i)} + b_{22}^{(i)} s_{26}^{(i)}}{h_i} \right\} \\
 \eta_{12}^{(i)} &= \frac{N_{12}^{(i)}}{N_{22}} = \frac{h_i}{a_{12}^{(i)} s_{16}^{(i)} + b_{12}^{(i)} s_{26}^{(i)} + s_{66}^{(i)}} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{a_{12}^{(i)} s_{16}^{(i)} + b_{12}^{(i)} s_{26}^{(i)} + s_{66}^{(i)}}{h_i} \right\}
 \end{aligned} \tag{36}$$