

# MODELIZACIÓN DE VIGA MULTICAPAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS CON VARIABLES MIXTAS PARA ANÁLISIS DE FISURACIÓN

Roberto S. Carnicer - Ing. Civil – Facultad de Ingeniería – Univ. De Belgrano  
Rodolfo Schwarz – Ing. Civil – Facultad de Ingeniería – Univ. De Belgrano  
Natalia A. Amado – Alumna Ing. Civil – FI - UB

## RESUMEN

El análisis se centrará en evaluar las fisuras en vigas de hormigón armado representando el comportamiento del material mediante un modelo de elementos finitos de variables mixtas (desplazamientos y tensiones).

Se realizará la modelación de una viga como si fuera de material compuesto con distinto comportamiento en compresión y tracción. Esta metodología permite analizar las fibras de la viga como si fueran capas de distinto material. Se considera cada capa en forma aislada, y la continuidad de los desplazamientos entre capas se logra mediante multiplicadores de Lagrange (variables estáticas). Esta modelización nos da directamente las variables (desplazamientos y rotaciones en el centro de la placa y las tensiones tangenciales y normales entre capas) que permiten analizar la interacción de interface entre ambos materiales. Finalmente se procederá a realizar modelaciones sucesivas modificando las propiedades del material para representar la pérdida de rigidez del hormigón debido a la fisuración.

Se resolverán diversos ejemplos numéricos y los resultados serán comparados con las hipótesis y metodologías establecidas en la normativa.

## ABSTRACT

*The analysis will focus on assessing cracks in reinforced concrete beams representing the material behavior using a finite element model of mixed variables (displacements and stresses).*

*Modeling will be performed as a composite beam with different behavior in tension and compression,. This methodology allows to analyze the behavior of the fibers of the beam like layers of different material. Each layer is considered in isolation, and continuity of movement between layers is achieved by Lagrange multipliers (static variables). This directly gives modeling variables (displacements and rotations in the center of the plate and the tangential and normal stresses between layers) which analyze the interaction interface between the two materials. Finally it will be proceed with successive modeling, modifying material properties to represent the loss of stiffness due to concrete cracking.*

*Several numerical examples are solved and the results will be compared with the assumptions and methodologies set out in the regulations.*

## 1. INTRODUCCIÓN

El hormigón armado es uno de los materiales compuestos más utilizados en la ingeniería civil. Tanto que en nuestro país acapara la mayor parte de las obras, así sean en el ámbito de las construcciones de viviendas y edificios industriales como en las puentes e infraestructura de transporte (puertos, aeropuertos ferrocarriles, etc.).

Una de las características más salientes es que la composición hormigón-barras de acero resulta muy apropiada para tomar las tensiones en vigas sometidas a flexión. Las tensiones de compresión son tomadas por el hormigón en tanto que las tensiones de tracción los son por las barras de acero. El cálculo tradicional no considera el poco pero real aporte del hormigón en tomar tensiones de tracción, asumiendo que el hormigón se fisura en la zona traccionada.

A partir del trabajo “Modelización de placas multicapas mediante elementos finitos con variables mixtas (cinemáticas y estáticas)” presentado en la 22° Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, surgió la idea de tratar de modelizar cómo se comporta el hormigón en la zona traccionada y emular las condiciones usada normalmente para el cálculo. Para ello se partió de un planteo energético tomando como base la teoría de Timoshenko y ampliando ésta para cada capa de forma aislada. La hipótesis de Timoshenko considera la deformación por corte y sostiene que la sección transversal se mantiene plana, pero no normales respecto al eje del mismo. El nuevo modelo permite resolver por medio de elementos finitos y utilizando variables mixtas, cinemáticas (desplazamientos y giros) y estáticas (tensiones). Todo el modelo se codificó en un programa de código libre denominado Octave.

Para ello, al programa desarrollado para vigas, se adecuo para determinar las capas de cada elemento en donde se alcanza un estado de fisuración. El procedimiento consiste en recorrer los elementos de la discretización de la viga en toda su altura, controlando que la tensión en cada capa de cada elemento no supere el límite de tensión a tracción del hormigón. En caso que se supere, para modelar numéricamente la fisuración, se reduce el módulo de elasticidad a un valor de  $0,01 \cdot E$ , representando de esa forma la pérdida de capacidad resistente debido a la fisuración. El proceso definido es iterativo y se detiene cuando se logra la convergencia del sistema.

También se verifica si la tensión de compresión del hormigón supera la tensión máxima, y la rotura del acero al superar la tensión fluencia minorada del mismo.

Sin embargo, debe considerarse que el modelo utilizado es elástico-lineal, de modo que no puede reproducir totalmente las condiciones de cálculo a rotura que hoy se aplican para el diseño de las estructuras de hormigón armado.

Finalmente, el programa permite calcular las fuerzas en cada una de las capas verificando que las mismas se encuentren equilibradas, obtener una aproximación del brazo de palanca y verifica que el momento interno iguale al momento externo.

## 2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA PARA VIGAS MULTICAPAS

A partir del planteo energético para vigas simples utilizando la hipótesis de Timoshenko, la cual tiene en cuenta la deformación por corte, se implementa un modelo de vigas multicapas. Cada capa se analiza como única y se imponen condiciones entre las mismas mediante los multiplicadores de Lagrange, que representan las tensiones en las interfaces.

El funcional para una capa genérica se expresa como:

$$\Pi(u, \beta, w) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} h_i b a(u_i, u_i) + \frac{1}{2} \frac{b h_i^3}{12} a(\beta_i, \beta_i) + \frac{1}{2} b h_i b (\nabla w_i - \beta_i, \nabla w_i - \beta_i) \right\} \quad (1)$$

Donde los operadores bilineales  $a(u_i, u_i)$  y  $a(\beta_i, \beta_i)$  representan la energía potencial por esfuerzos membranales y flexión respectivamente, mientras  $b(\nabla w_i - \beta_i, \nabla w_i - \beta_i)$ , el termino de energía de corte.

Si el desplazamiento para una capa genérica en cualquier punto de la misma es:

$$u_i(x, z) = u_{oi}(x) - z\beta_i(x) \quad (2)$$

A la cual se le imponen ciertas restricciones de forma de asegurar la continuidad de desplazamientos en la interface, como ser:

- ❖ Los desplazamientos  $u_i(x, h_i/2)$  en la interface deben ser iguales a los desplazamientos  $u_{i+1}(x, -h_{i+1}/2)$

$$u_i\left(x, \frac{h_i}{2}\right) = u_{oi}(x) - \frac{h_i}{2} \beta_i(x) \quad (3)$$

$$u_{i+1}\left(x, \frac{-h_{i+1}}{2}\right) = u_{oi+1}(x) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_{i+1}(x) \quad (4)$$

$$u_{oi}(x) - \frac{h_i}{2} \beta_i(x) = u_{oi+1}(x) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_{i+1}(x) \quad (5)$$

- ❖ Los desplazamientos verticales  $w_i$  de la capa  $i$  deben ser iguales a los desplazamientos verticales  $w_{i+1}$  de la capa  $i+1$ .

$$w_i(x) = w_{i+1}(x) \quad (6)$$

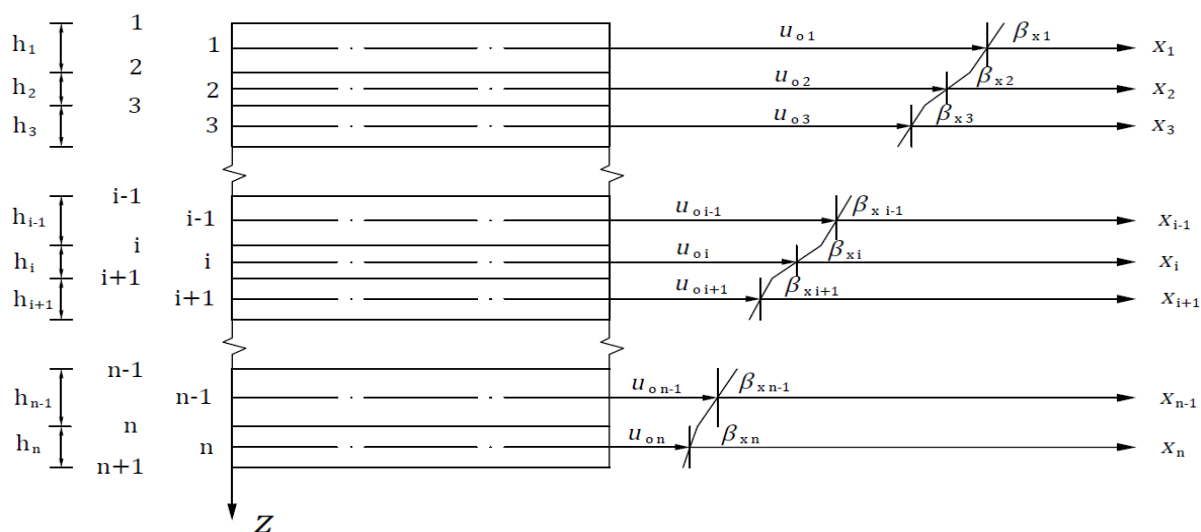


Figura 1: Campo de desplazamientos a lo largo del espesor

De esta forma, al considerar la viga como un apilamiento de capas simples con continuidad de desplazamientos se puede expresar el funcional de la energía potencial total como:

$$\Pi(u, \beta, w, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} h_i b a(u_i, u_i) + \frac{1}{2} \frac{b h_i^3}{12} a(\beta_i, \beta_i) + \frac{1}{2} b h_i b (\nabla w_i - \beta_i, \nabla w_i - \beta_i) \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ \iint_{\Omega_{i+1}} \left[ (u_j - \beta_i \frac{h_i}{2}) - (u_{i+1} + \beta_{i+1} \frac{h_{i+1}}{2}) \right] \lambda_{i+1} d\Omega + \iint_{\Omega_{i+1}} (w_i - w_{i+1}) \mu_{i+1} d\Omega \right\} \quad (7)$$

Donde  $\lambda$  y  $\mu$  son los multiplicadores de Lagrange que representan las tensiones interlaminares en la interfaz.

### 3. COMPARACIÓN 1 - FISURACIÓN

Como una primera aproximación y con el fin de verificar el programa, se realiza el cálculo para vigas sometidas a distintos niveles de carga distribuida basado en el reglamento CIRSOC 201/05 de forma tal de hallar la armadura necesaria, con dicha armadura se calculará el espesor equivalente de acero que será el utilizado para evaluar la fisuración.

Se realizaron cinco pruebas para vigas con dimensiones y cargas diferentes. En todos los casos la modelación se hizo en una viga simplemente apoyada mallada en 5 elementos de igual longitud. Por cuestiones de ahorro de tiempo de ejecución y recursos, la modelación se realizó sobre media viga.

Caso (Archivo)	Altura h (m)	Altura Útil d (m)	Ancho bw (m)	Largo L (m)	Carga última (KN/m)	Espesor Acero (m)
<i>input_data_fisuracion_1</i>	0,5	0,45	0,2	5	25,89	0,0025
<i>input_data_fisuracion_3</i>	0,25	0,2	0,15	4	10	0,0020
<i>input_data_fisuracion_5</i>	0,6	0,55	0,4	6	40	0,0023
<i>input_data_fisuracion_7</i>	0,65	0,6	0,25	7	30	0,0034
<i>input_data_fisuracion_9</i>	0,3	0,25	0,15	4	10	0,0015

Tabla 1: Modelizaciones

En el caso “input\_data\_fisuracion\_1”, se logró la convergencia del mismo luego de seis iteraciones, quedando la viga fisurada de la siguiente forma:

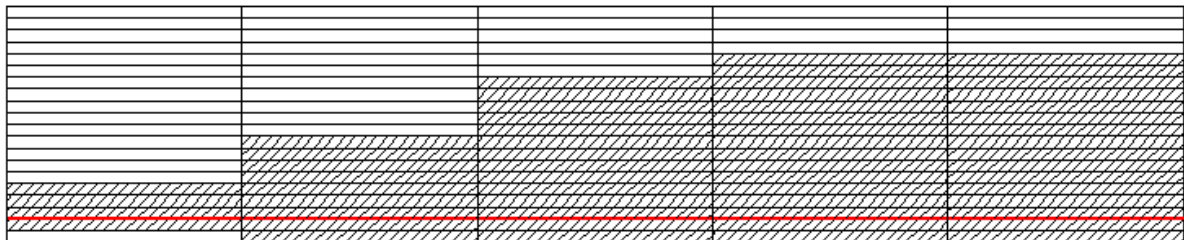


Figura 2: Viga fisurada (archivo de datos «input\_data\_fisuracion\_1»)

El diagrama de tensiones para el elemento mayormente solicitado luego lograda la convergencia del sistema resultó de la siguiente forma.

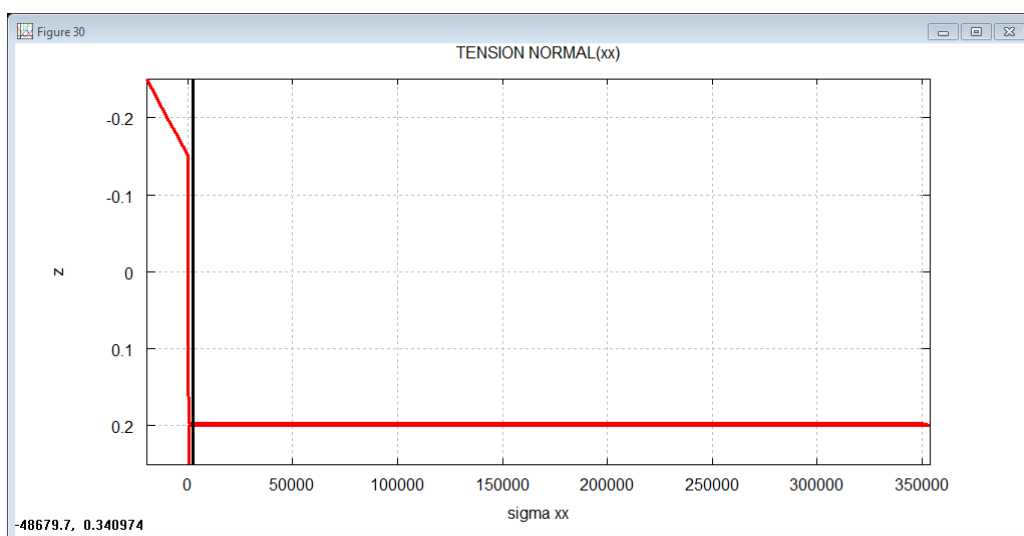


Figura 3: Tensión Nodo 5 luego de convergencia (input\_data\_fisuracion\_1)

Para los demás casos probados, los resultados se obtuvieron luego de diez iteraciones (archivo "input\_data\_fisuracion\_3"), cinco iteraciones (archivos "input\_data\_fisuracion\_5" y "input\_data\_fisuracion\_9") y siete iteraciones ("input\_data\_fisuracion\_7").

A modo de ejemplo se muestra el proceso de convergencia para el caso incluido en el caso "input\_data\_fisuracion\_3", en la primera, quinta y décima iteración.

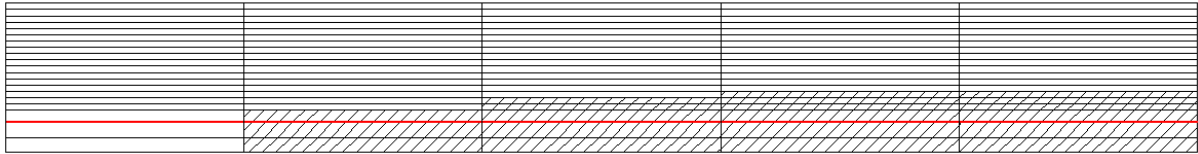


Figura 4: Viga fisurada. Iteración 1.

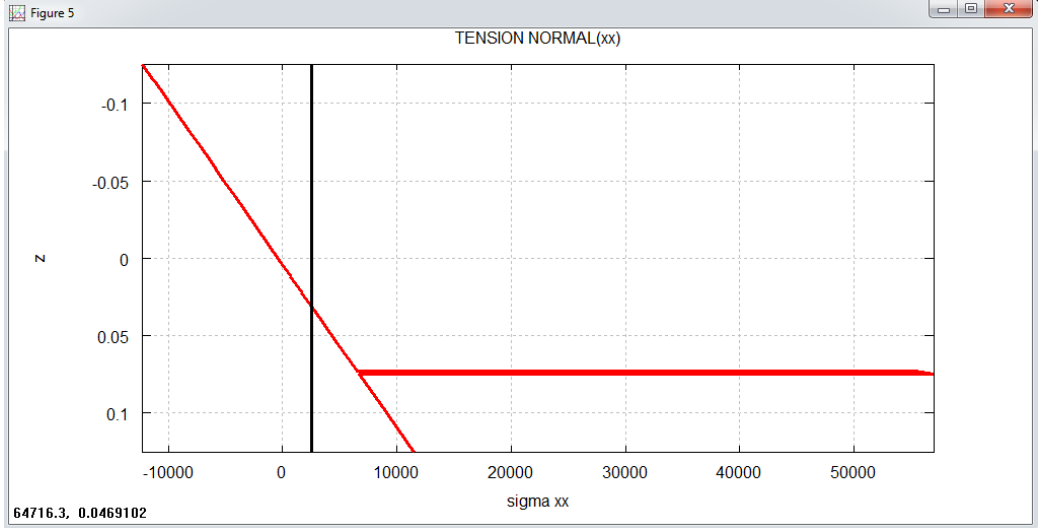


Figura 5: Tensión Nodo 5. Iteración 1.

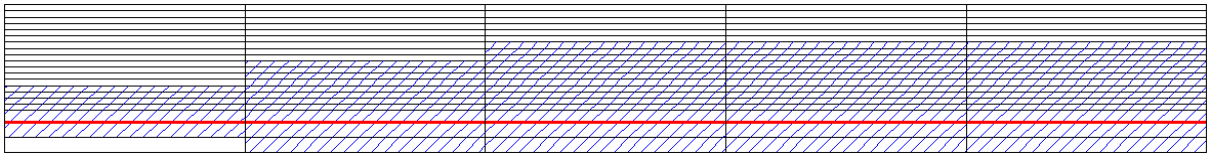
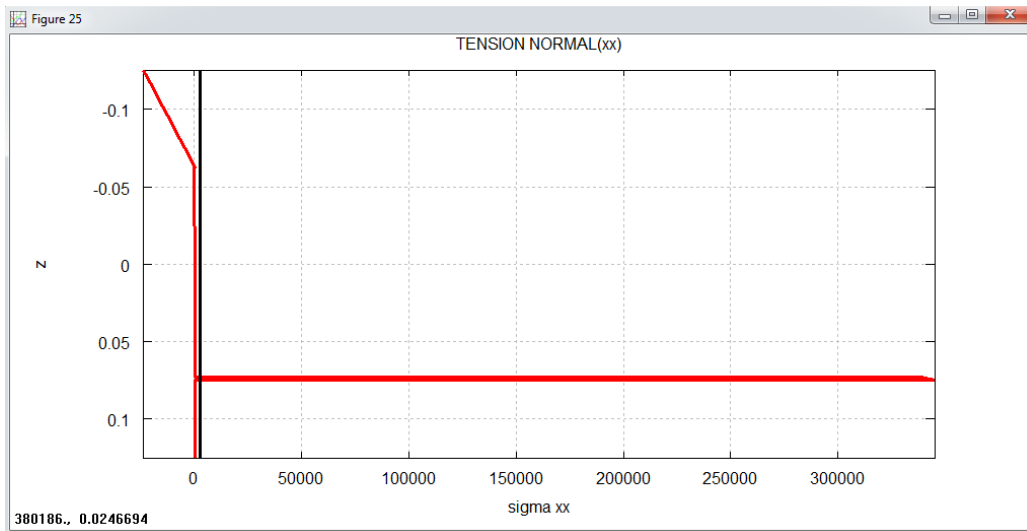
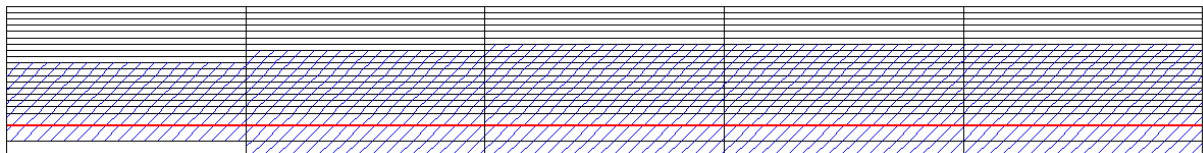


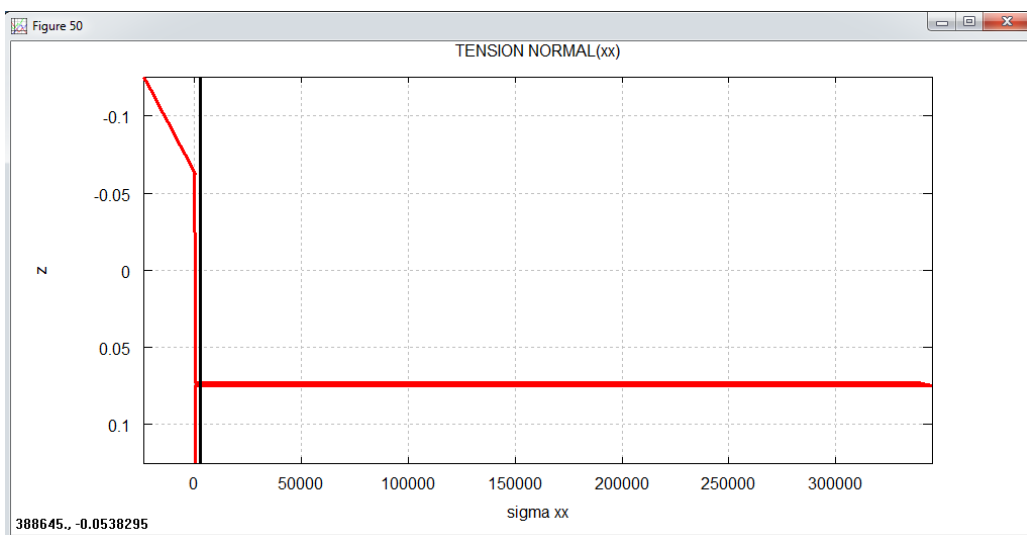
Figura 6: Viga fisurada. Iteración 5



**Figura 7: Tensión Nodo 5. Iteración 6**



**Figura 8: Viga fisurada. Iteración 10**



**Figura 9: Tensión Nodo 5. Iteración 10**

Tras analizar los resultados, se puede observar que las capas rayadas representan las capas en las cuales la tensión de tracción ha superado la tensión límite de tracción y que por lo tanto pueden considerarse como fisuradas. En ese contexto, la zona de mayor profundidad de fisuras corresponde al elemento que se encuentra más solicitado, o sea, en el centro de la viga.

A partir de esta consideración, en la Tabla 2 se muestra la profundidad

máxima de fisura obtenida para cada uno de los ejemplos.

<b>Caso (archivo)</b>	<b>Profundidad de fisura (m)</b>
<i>input_data_fisuracion_1</i>	0,4
<i>input_data_fisuracion_3</i>	0,1868
<i>input_data_fisuracion_5</i>	0,4842
<i>input_data_fisuracion_7</i>	0,5236
<i>input_data_fisuracion_9</i>	0,2342

Tabla 2: Profundidad de fisuras

#### 4. COMPARACIÓN 2 – RESULTANTE DE FUERZAS

Para cada uno de los diez casos anteriores, se verificó que las fuerzas se encuentren equilibradas, resultando del mismo valor las fuerzas a compresión que a tracción. Se graficó los valores de fuerzas de cada una de las capas para el elemento sometido a mayor sollicitación. Se verificó que el momento interno sea igual al momento externo.

En la Tabla 3 y Tabla 4 se muestra la fuerza en el centro de cada capa, la resultante de fuerzas a compresión y tracción, los momentos internos productos de trasladar cada una de las fuerzas al eje neutro, las resultantes de dicho momento y las distancias del eje neutro a la resultante de fuerzas, tanto a compresión como a tracción.

<b>Capa</b>	<b>Alturas Parciales (m)</b>	<b>Fuerzas (kN)</b>	<b>Resultante de fuerzas (KN)</b>	<b>Momentos (kNm)</b>	<b>Resultante de Momento (kNm)</b>	<b>Distancia de Fuerza al Eje neutro (m)</b>
<b>1</b>	0,025	-85,16	<b>-194,307</b>	7,4513	<b>12,7626</b>	<b>0,0657</b>
<b>2</b>	0,025	-60,75		3,7969		
<b>3</b>	0,025	-36,38		1,3641		
<b>4</b>	0,025	-12,02		0,1503		
<b>5</b>	0,025	0,03	<b>194,307</b>	0,0461	<b>66,3628</b>	<b>0,3415</b>
<b>6</b>	0,025	0,10		0,0037		
<b>7</b>	0,025	0,23		0,0146		
<b>8</b>	0,025	0,44		0,0381		
<b>9</b>	0,025	0,63		0,0713		
<b>10</b>	0,025	0,84		0,1149		
<b>11</b>	0,025	1,04		0,1693		
<b>12</b>	0,025	1,18		0,2216		
<b>13</b>	0,025	1,27		0,2689		

Capa	Alturas	Fuerzas	Resultante	Momentos	Resultante	Distancia
14	0,025	1,36		0,3232		
15	0,025	1,46		0,3840		
16	0,025	1,62		0,4668		
17	0,025	1,82		0,5684		
18	0,0225	1,78		0,5994		
19	0,0025	175,90		61,3451		
20	0,025	2,19		0,7924		
21	0,025	2,41		0,9350		
<b>Totales</b>		<b>0,00</b>			<b>79,1253</b>	<b>0,4072</b>

Tabla 3: Resultante de fuerzas, momentos y brazo de palanca (archivo input\_data\_fisuración\_1)

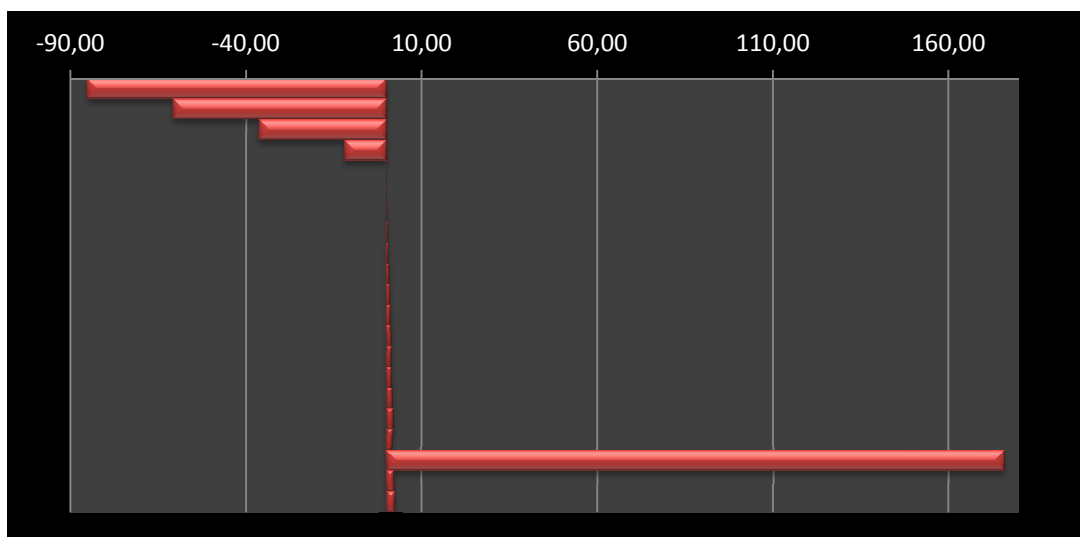


Figura 10: Grafico de fuerzas en nodo 5 una vez convergido el modelo (input\_data\_fisuracion\_1)

Capa	Alturas Parciales (m)	Fuerzas (kN)	Resultante de fuerzas (KN)	Momentos (kNm)	Resultante de Momento (kNm)	Distancia de Fuerza al Eje neutro (m)
1	0,0105	-34,282	-110,39	-1,9847	-4,6561	0,0422
2	0,0105	-27,921		-1,3226		
3	0,0105	-21,569		-0,7946		
4	0,0105	-15,228		-0,4007		
5	0,0105	-8,873		-0,1401		
6	0,0105	-2,518		-0,0133		
7	0,0105	0,037	110,39	-0,0002	-14,9124	0,1351
8	0,0105	0,085		-0,0013		
9	0,0105	0,122		-0,0032		
10	0,0105	0,168		-0,0062		

Capa	Alturas	Fuerzas	Resultante	Momentos	Resultant	Distancia
11	0,0105	0,220		-0,0151		
12	0,0105	0,271		-0,0157		
13	0,0105	0,321		-0,0219		
14	0,0105	0,370		-0,0292		
15	0,0105	0,419		-0,0375		
16	0,0105	0,468		-0,0468		
17	0,0105	0,516		-0,0570		
18	0,0191	1,058		-0,1326		
19	0,0020	102,610		-13,9388		
20	0,0250	1,690		-0,2523		
21	0,0250	2,034		-0,3546		
<b>Totales</b>		<b>0,00</b>			<b>-19,5684</b>	<b>0,1773</b>

Tabla 4: Resultante de fuerzas, momentos y brazo de palanca (input\_data\_fisuracion\_3)

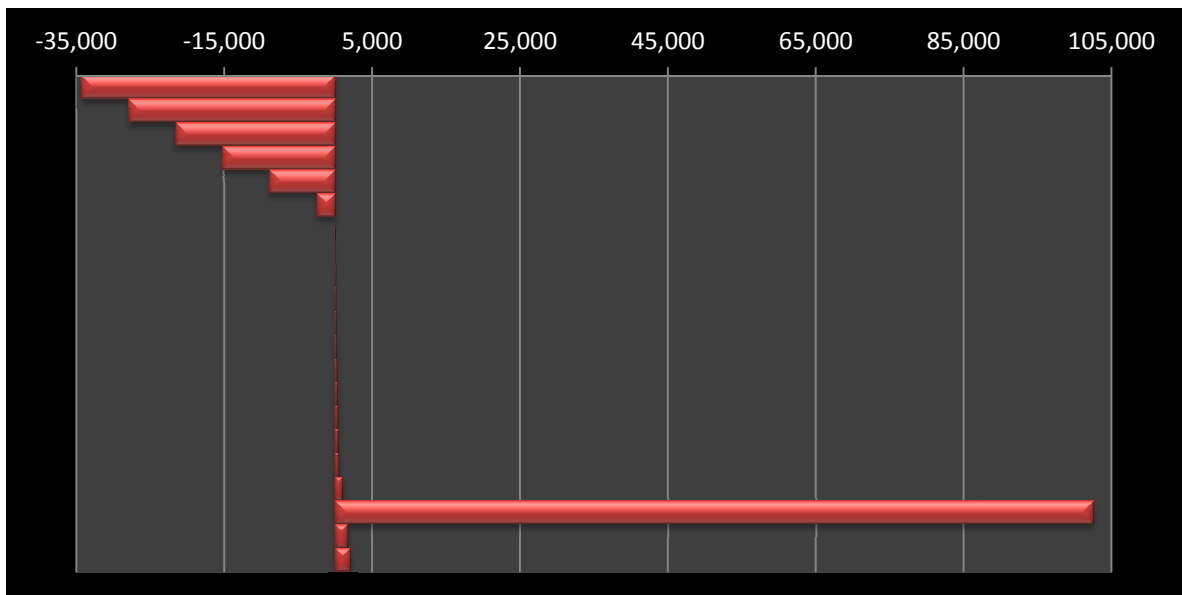


Figura 11: Grafico de fuerzas en nodo 5 una vez convergido el modelo (input\_data\_fisuracion\_3)

Como era de esperar, la resultante de las fuerzas es nula, por lo tanto están equilibradas. En tracción, se puede considerar que es el acero el que toma toda la fuerza. A su vez, se verifica que el momento interno es aproximadamente igual al momento externo.

Por lo tanto, al comparar los resultados obtenidos con la modelación numérica y los que se obtienen en el modelo teórico de cálculo, no se observan diferencias conceptuales.

## 5. COMPARACIÓN 3 – TENSION DE FLUENCIA MINORADA

El modelo numérico permite conocer la distribución de las tensiones a lo largo de la altura de la sección, por cuanto cada capa se analiza en forma individual, pero no independiente de las demás. Eso ayuda a analizar cómo se comporta la viga cuando es sometida a la carga actuante.

De esta manera, para cada uno de los ejemplos se comparó si la tensión del acero obtenida se aproximaba a la tensión de fluencia minorada por el coeficiente de flexión, tal como establece el modelo teórico de cálculo (CIRSOC 201/05).

$$\Phi R_n \geq \gamma Q_n \quad (8)$$

donde:

$R_n$  = Resistencia media propuesta

$\Phi$  = Factor reductor de resistencia (0,9 en caso de flexión)

$Q_n$  = Efecto de las cargas de servicio

$\gamma$  = Factor mayorador de cargas

Para una tensión de fluencia de 420 MPa, minorada por el coeficiente de flexión 0,9, la tensión de fluencia minorada resulta ser 378 MPa

<b>Programa</b>	<b>Tensión Acero (MPa)</b>	<b>Diferencia (MPa)</b>
<i>input_data_fisuracion_1</i>	351,8	26,2
<i>input_data_fisuracion_3</i>	342,04	35,96
<i>input_data_fisuracion_5</i>	338,85	39,15
<i>input_data_fisuracion_7</i>	355,98	22,02
<i>input_data_fisuracion_9</i>	345,94	32,06

Tabla 5: Tensión a tracción en acero en elemento 5

En la Tabla 5 puede verse que el acero nunca alcanza ese valor. Además incluye la diferencia que hay entre la tensión del acero según el modelo numérico y la tensión de referencia definida en el párrafo anterior.

Finalmente, la Tabla 6 muestra las tensiones de tracción que toma el hormigón según los resultados del modelo numérico:

<b>Programa</b>	<b>Tensión Hormigón (MPa)</b>
<i>input_data_fisuracion_1</i>	3,7214
<i>input_data_fisuracion_3</i>	3,261
<i>input_data_fisuracion_5</i>	3,32776
<i>input_data_fisuracion_7</i>	3,47766
<i>input_data_fisuracion_9</i>	3,4926

Tabla 6: Tensión a tracción en hormigón en elemento 5

## 6. COMPARACIÓN 4 – EJE NEUTRO

Otra comparación que se ha tenido en cuenta es la ubicación del eje neutro en la sección analizada.

Para ello, se toma la distancia al eje neutro desde la parte superior de la viga con la distancia definida por el modelo teórico de cálculo.

Según el libro “Design of Reinforced Concrete” de Jack McCormac la ubicación del eje neutro para caso elástico lineal es:

$$c = \frac{\varepsilon \cdot E_{ac}}{\varepsilon \cdot E_{ac} + f_y} \cdot d \quad (9)$$

Donde:

$E_{ac}$  = Modulo de elasticidad del acero

$\varepsilon$  = deformación específica del hormigón en la parte más comprimida (extremo superior de viga)

$f_y$  = tensión de fluencia del acero

$d$  = distancia a la armadura desde el borde superior

<b>Caso (archivo)</b>	<b>Distancia del eje neutro al borde superior (en m) (Teórico)</b>	<b>Distancia del eje neutro al borde superior (en m) Programa</b>
<i>input_data_fisuracion_1</i>	0,12697	0,1
<i>input_data_fisuracion_3</i>	0,06460	0,06315
<i>input_data_fisuracion_5</i>	0,13232	0,11579
<i>input_data_fisuracion_7</i>	0,17051	0,15789
<i>input_data_fisuracion_9</i>	0,06734	0,0657

Tabla 7: Eje Neutro. Comparación resultados teóricos y numéricos.

En la tabla 7 puede verse que la distancia al eje neutro calculada mediante el programa se acerca adecuadamente a la calculada mediante el modelo teórico.

## 7. COMPARACIÓN 5 – DOS CAPAS DE ACERO

Para estudiar un caso muy común, se procedió a modelar el caso de una viga que requiera dos capas de armadura de acero y luego verificar el comportamiento de la misma para resistir las cargas consideradas.

El modelo teórico no detalla un procedimiento diferente de cálculo para el caso de armaduras en varias capas limitándose solamente a modificar la posición de la armadura respecto del eje neutro.

Analizar este caso permite también entender un poco mejor la distribución de las tensiones en la pieza y analizar luego el comportamiento general de la sección en estudio.

Para ello se consideraron cinco casos, que se incluyeron en los archivos “input\_data\_fisuración\_11” a “input\_data\_fisuración\_15”.

Las Tabla 8 y Tabla 9, compara las tensiones obtenidas en “input\_data\_fisuración\_1” e “input\_data\_fisuración\_5”, con las obtenidas en “input\_data\_fisuración\_11” e “input\_data\_fisuración\_15”, todos con iguales condiciones de carga y dimensiones generales de la viga.

Caso (archivo): input_data_fisuracion_1			Caso (archivo): input_data_fisuracion_11		
Capa	Alturas Parciales (m)	Tensiones (kN)	Capa	Alturas Parciales (m)	Tensiones (kN)
1	0,025	-19473,00	1	0,023	-20108,00
		-14590,00			-15319,00
2	0,025	-14589,00	2	0,023	-15319,00
		-9711,00			-10538,00
3	0,025	-9711,50	3	0,023	-10537,00
		-4838,40			-5757,50
4	0,025	-4837,90	4	0,023	-5756,70
		28,23			-969,05
5	0,025	0,28	5	0,023	-9,69
		13,15			36,03
6	0,025	13,14	6	0,023	36,00
		26,26			50,17
7	0,025	26,26	7	0,023	50,14
		67,23			66,94
8	0,025	67,23	8	0,023	66,92
		107,06			104,82
9	0,025	107,05	9	0,023	104,81

Caso (archivo): input_data_fisuracion_1			Caso (archivo): input_data_fisuracion_11		
Capa	Alturas Parciales (m)	Tensiones (kN)	Capa	Alturas Parciales (m)	Tensiones (kN)
		146,46			137,11
10	0,025	146,45	10	0,023	137,09
		187,67			167,31
		187,68			167,31
11	0,025	229,15	11	0,023	196,82
		229,14			196,81
12	0,025	243,71	12	0,023	226,14
		243,71			226,17
13	0,025	262,50	13	0,023	255,52
		262,52			255,54
14	0,025	281,86	14	0,023	285,01
		281,86			285,03
15	0,025	303,26	15	0,023	314,65
		303,27			314,64
16	0,025	346,19	16	0,067	399,72
		346,19			340200,00
17	0,025	381,34	17	0,00125	342350,00
		381,34			402,24
18	0,0225	410,91	18	0,025	443,25
		349720,00			377210,00
19	0,0025	353880,00	19	0,00125	379360,00
		415,80			445,76
20	0,025	458,51	20	0,025	490,04
		458,50			490,07
21	0,025	506,66	21	0,025	539,37

Tabla 8: Comparación de tensiones

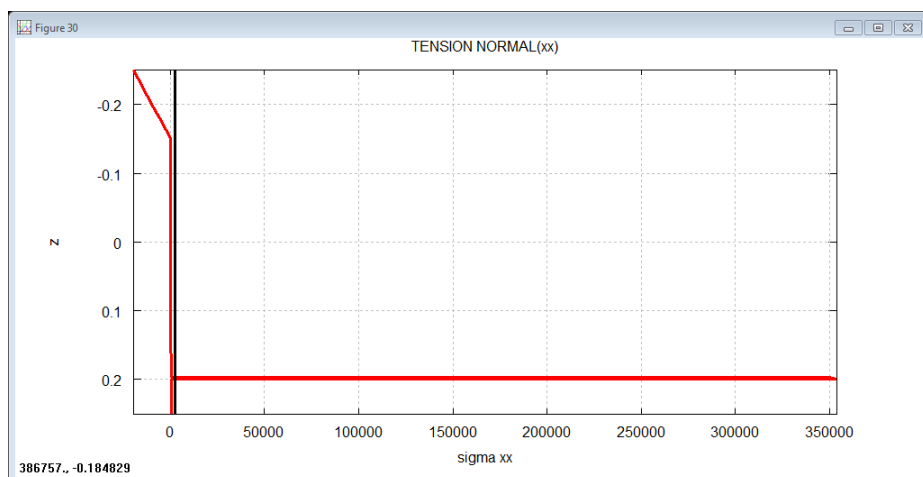


Figura 12: Tensión en nodo 5 una vez convergido el modelo (input\_data\_fisuracion\_1)

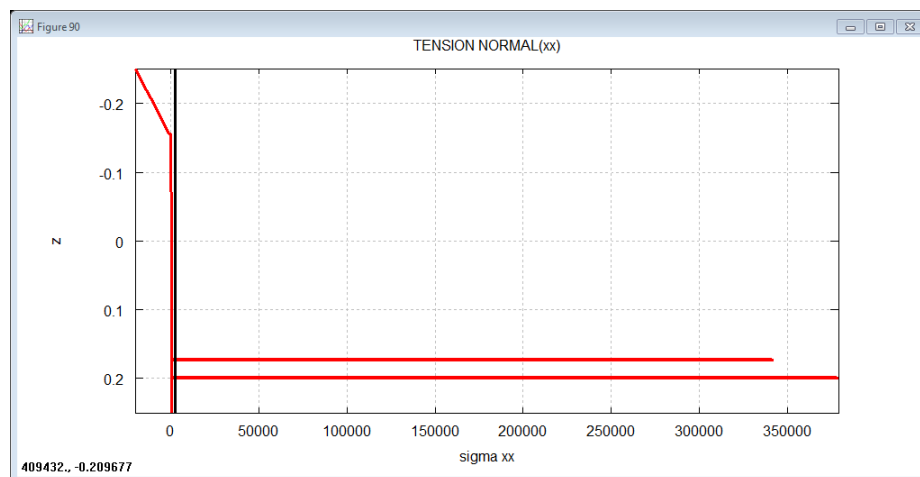


Figura 13: Tensión en nodo 5 una vez convergido el modelo (input\_data\_fisuracion\_11)

Nombre del programa: input_data_fisuracion_5			Nombre del programa: input_data_fisuracion_15		
Capa	Alturas Parciales (m)	Tensiones (kN)	Capa	Alturas Parciales (m)	Tensiones (kN)
1	0,0289	-15678,00	1	0,0289	-16113,00
		-11658,00			-11957,00
2	0,0289	-11657,00	2	0,0289	-11959,00
		-7639,00			-7805,90
3	0,0289	-7638,50	3	0,0289	-7805,30
		-3625,80			-3658,20
4	0,0289	-3628,30	4	0,0289	-3658,30
		375,62			479,77
5	0,0289	3,77	5	0,0289	4,80
		16,38			18,16
6	0,0289	16,38	6	0,0289	18,16
		30,33			32,91
7	0,0289	30,35	7	0,0289	32,89
		65,99			69,77
8	0,0289	65,99	8	0,0289	69,77
		100,35			105,34
9	0,0289	100,36	9	0,0289	105,33
		134,52			140,68
10	0,0289	134,53	10	0,0289	140,68
		170,16			177,50
11	0,0289	170,16	11	0,0289	177,51
		205,50			214,05
12	0,0289	205,50	12	0,0289	214,05
		219,72			229,31
13	0,0289	219,72	13	0,0289	229,30
		237,60			248,26
14	0,0289	237,60	14	0,0289	248,28

Nombre del programa: input_data_fisuracion_5			Nombre del programa: input_data_fisuracion_15		
Capa	Alturas Parciales (m)	Tensiones (kN)	Capa	Alturas Parciales (m)	Tensiones (kN)
		256,01			267,78
15	0,0289	256,02	15	0,0289	267,76
		276,33			289,57
16	0,0289	276,32	16	0,08848	289,56
		312,24			388,84
17	0,0289	312,25	17	0,00115	330920,00
		342,63			332330,00
18	0,05559	342,62	18	0,025	390,48
		396,57			420,42
19	0,0023	337500,00	19	0,00115	357810,00
		340210,00			359210,00
20	0,025	399,75	20	0,025	422,10
		428,71			452,27
21	0,025	428,70	21	0,025	452,23
		462,48			487,18

Tabla 9: Comparación de tensiones (input\_data\_fisuracion\_5 y 15)

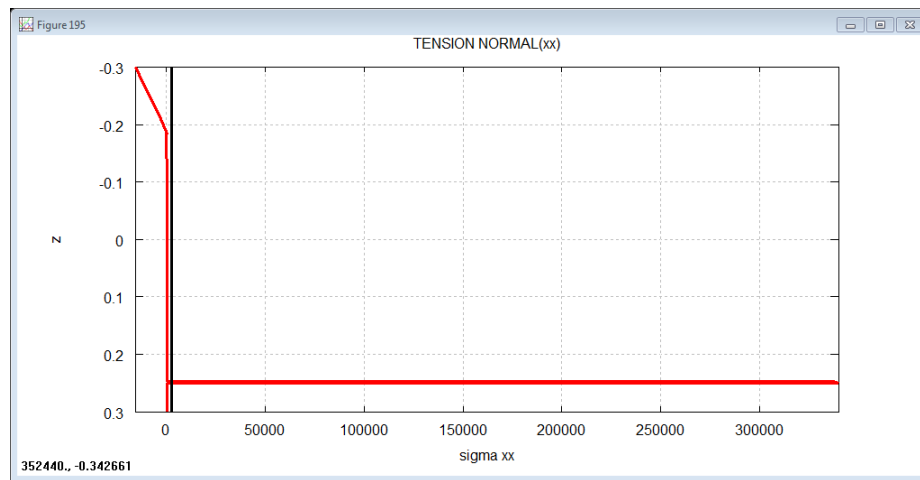


Figura 14: Tensión en nodo 5 una vez convergido el modelo (input\_data\_fisuracion\_5)

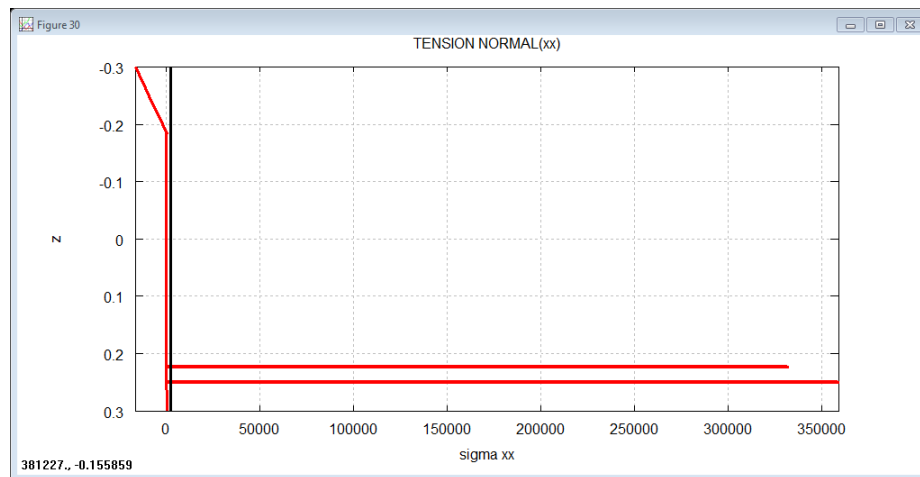


Figura 15: Tensión en nodo 5 una vez convergido el modelo (input\_data\_fisuracion\_15)

## 8. CONCLUSIONES

El modelo numérico utilizado para representar que el hormigón se fisura en la parte sometida a tracción, mediante modificación de las características mecánicas, resultó ser una muy buena aproximación. Esta modificación de las propiedades mecánicas se materializó a través de la reducción del módulo de elasticidad del hormigón cada vez que las tensiones de tracción superaban el valor límite convencional.

Con la ayuda de una modelación por capas o láminas de la viga, se ha conseguido que mediante las modificaciones a las propiedades mecánicas impuestas al modelo numérico pueda representar adecuadamente la pérdida de capacidad resistente de las capas de hormigón sometidas a tracción, de manera de aproximar la penetración de las fisuras en las secciones de hormigón con mayor sollicitación a flexión, aún cuando el modelo físico-matemático está limitado a un estado elástico lineal.

Una primera consideración de los resultados obtenidos es la ubicación del eje neutro, que puede obtenerse en forma directa a partir de las tensiones en cada capa, incluso mediante la ayuda de herramientas numéricas adicionales para determinar la ubicación del punto donde las tensiones son nulas.

En segundo lugar se, verifico el equilibrio de las fuerzas de tracción y de compresión en las capas respectiva y el momento respectivo.

Por otra parte, se calculó la tensión del acero a tracción siendo próxima a la tensión minorada de fluencia. La diferencia se debe a la participación de las tensiones del hormigón a tracción y a diferencias de redondeo del problema numérico

Se comparó la distancia hallada al eje neutro con la establecida en el cálculo del modelo teórico, obteniéndose que ambas resultan aproximadamente iguales.

Puede verse que tanto al analizar la sección con una sola capa de armadura como con dos capas separadas por una capa de hormigón, ninguna de las capas de acero alcanza tensiones de fluencia, en tanto que las tensiones de compresión en el hormigón tampoco superan el valor de la tensión característica de rotura.

Otro resultado de interés es que al agregar una capa adicional de acero, de acuerdo con el modelo numérico se reduce la fisuración, que se traduce en reubicación del eje neutro. Éste se localiza más cerca del eje medio de la pieza, mejorando el aprovechamiento del hormigón para tomar esfuerzos de compresión.

La utilización de un modelo elástico lineal limita la posibilidad de analizar el ancho de las fisuras, que requiere la aplicación o el desarrollo de un modelo matemático diferente, fuera del alcance de este trabajo.

Sin embargo, dado que existe una relación entre la profundidad de la fisura y el ancho de la misma, puede interpretarse que la posibilidad de representar con una muy buena aproximación numérica la penetración de las fisuras mediante capas de hormigón que pierden capacidad mecánica por reducción del módulo de elasticidad es una forma indirecta de controlar el ancho de la fisuración. Basta con analizar diferentes conformaciones de capas de hormigón y de acero para establecer una disposición que reduzca la penetración de las fisuras para conseguir también alguna reducción en el ancho de las mismas.

## 9. BIBLIOGRAFÍA

- A.J.M. FERREIRA, "MATLAB Codes for Finite Element Analysis", Universidad do Porto, Portugal, 2008.
- BATTAGLIA. CASTRO. "Recursos para el Diseño de Estructuras Resistentes. Hormigón Armado. Tomo III". Buenos Aires. Nobuko. 2010
- CARNICER R. S., DESÍA B. A., SCHWARZ R. A., AND PAN Q., "Análisis de placas multicapas mediante un modelo de elementos finitos híbrido". Mecánica Computacional Vol. XXXI, 857-874, 2012.
- CIFUENTES JOSE MARIA, "Manual de iniciación a GNU Octave", Universidad Politécnica de Teruel, 2006.
- CIRSOC 201/05 - INTI, Proyecto, Cálculo y Ejecución de Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado
- FRITZ LEONHARDT, "Estructuras de Hormigón Armado, Verificación de la capacidad de uso. Tomo IV", Buenos Aires. El Ateneo. 1985
- J. McCORMAC. "Design of reinforced concrete". Third edition. Harper Collins. 1993
- ORLER. DANONI. "Introducción al cálculo de hormigón estructural". 2da. Edición. Buenos Aires. Nobuko. 2011.
- R. D. COOK, D. S. MALKUS, M. E. PLESHA. "Concepts and applications of finite element analysis". Third edition. John Wiley & Sons. 1989.
- ZARATE, OÑATE, "MAT-Fem Learning Finite Elements with MATLAB and GID", 2006.