

IMPLEMENTACIÓN DE INFERENCIA BAYESIANA EN EL AJUSTE DE MODELOS ESTRUCTURALES

Hurtado Oscar D.¹; Ortíz Albert R.²

¹ Estudiante de ingeniería civil, ² Profesor
Universidad del Valle, Cali

oscar.david.hurtado@correounivalle.edu.co albert.ortiz@correounivalle.edu.co

RESUMEN

El uso común de simplificaciones y/o suposiciones en modelos estructurales pueden reducir la precisión de los resultados. Este problema ha llevado al desarrollo de técnicas de ajuste de modelos deterministas que, a partir de datos experimentales, buscan un valor numérico que represente una estimación razonable del parámetro de interés y minimice el error entre la respuesta del modelo y la estructura real. Sin embargo, un enfoque estadístico proporciona una estimación que tiene en cuenta su incertidumbre asociada. En este trabajo se presenta una visión general de los métodos de inferencia bayesiana para el ajuste paramétrico de modelos estructurales y la cuantificación de su incertidumbre. Además, se demuestra la importancia de su implementación en la calibración de modelos estructurales a partir de ensayos de análisis modal para la estimación de propiedades dinámicas. Estas propiedades dinámicas son utilizadas para inferir tanto las características geométricas de los elementos estructurales como los materiales que los conforman y su incertidumbre asociada.

ABSTRACT

The common use of simplifications and/or assumptions in structural models can reduce the accuracy of the results. This problem has led to the development of deterministic model fitting techniques that, from experimental data, seek a numerical value that represents a reasonable estimate of the parameter of interest and minimizes the error between the model response and the actual structure. However, a statistical approach provides an estimate that takes into account its associated uncertainty. This paper presents an overview of Bayesian inference methods for parametric fitting of structural models and quantification of their uncertainty. In addition, the importance of their implementation in the calibration of structural models from modal analysis tests for the estimation of dynamic properties is demonstrated. These dynamic properties are used to infer both the geometrical characteristics of the structural elements and the materials that form them and their associated uncertainty.

INTRODUCCIÓN

La ingeniería estructural, desde sus inicios, ha basado ampliamente sus investigaciones y avances teóricos en la modelación de sistemas complejos. Esta modelación se hace a través de representaciones matemáticas de los elementos y materiales, con el fin de obtener una predicción de su comportamiento ante diferentes demandas. Con el desarrollo de la computación moderna, estos modelos estructurales han permitido predecir el comportamiento de estructuras de un nivel de complejidad alto en un tiempo reducido respecto a los métodos manuales.

Sin embargo, aún se hacen suposiciones y simplificaciones, debido a la base teórica con la que se realiza la mayor parte del modelado y el diseño estructural actual. Además, con este tipo de modelos, llamados deterministas, no es posible representar la variabilidad paramétrica de los materiales, las dimensiones y las condiciones a las que estará sometida la estructura real. Esto causa una visión limitada a la hora de analizar resultados. Esta aproximación al problema se aleja del objetivo principal con el que fueron creados estos, ya que no se analiza una de las dimensiones más influyentes en una representación de la realidad, que es la incertidumbre asociada a los parámetros.

La estadística inferencial propone una solución al problema de la aproximación determinista, a través de generación de modelos en la que sus resultados se dan de manera probabilística. Así se puede saber numéricamente, qué tan precisas son las salidas del modelo, sacar conclusiones basadas en porcentajes y tomar decisiones en diseños más seguros e investigaciones más fiables.

El objetivo de ajustar este tipo de modelos estructurales tanto como se pueda a la realidad constituye, en la actualidad, una de las principales asignaturas pendientes. El uso de algoritmos computacionales con el fin de ajustar de manera automática los modelos de elementos se convierte en una práctica cada vez más común. Sin embargo, el creciente uso de la inteligencia artificial en la ingeniería sugiere que su utilidad se puede extender también al ajuste de modelos, específicamente la rama del machine learning, que es la rama que se basa en la idea de que los sistemas pueden aprender de un conjunto de datos, identificar patrones y tomar decisiones con mínima intervención humana.

Los modelos basados en análisis bayesianos (funciones de distribución de probabilidad, métodos de Monte Carlo basado en cadenas de Markov (MCMC), inteligencia artificial, etc.) se visualizan como la aproximación más efectiva en cuanto la simulación cuantificable y precisa de la realidad que se está buscando. Los modelos virtuales, en general, se crean como respuesta a una problemática en cuanto a los costos y la complejidad de realizar pruebas en elementos reales, por lo que tener

modelos probabilísticos, con una mejor aproximación a la realidad permite ahorrar, incluso ganando calidad en las decisiones con base en los resultados que se obtendrán.

INFERENCIA BAYESIANA

La inferencia bayesiana es un método de inferencia estadística en el que se utiliza el teorema de Bayes para actualizar la probabilidad de una hipótesis a medida que se dispone de más pruebas. La inferencia bayesiana es especialmente importante en el análisis dinámico de una secuencia de datos. En este estudio se emplea la inferencia bayesiana como enfoque principal para resolver problemas de ingeniería inversa ^{1,2}.

El principio esencial de la inferencia bayesiana es que la parametrización del modelo matemático se representa como variables aleatorias con funciones de distribución de probabilidad conjuntas. Esta aleatoriedad puede considerarse como la variabilidad de los parámetros en relación con la incertidumbre de los valores reales ³. El problema de ingeniería inversa se resuelve determinando una distribución de probabilidad que incorpora todos los instrumentos, la medición, el modelo matemático y la información previa. La distribución posterior describe el grado de confianza en el parámetro estimado en función de la incertidumbre asociada a la medición, el modelo, el error humano y otros factores ⁴.

PROBLEMAS DE INGENIERÍA INVERSA

Los problemas de ingeniería inversa son aquellos en los que se descubre un atributo desconocido de un sistema o un medio observando su reacción a un estímulo conocido. El concepto de problemas de ingeniería inversa se estableció con la evaluación no destructiva como motivación. Los enfoques de inferencia estadística abordan el problema inverso de forma sistemática, teniendo en cuenta toda la información previa relevante, utilizan variables aleatorias para relacionar los datos observados \mathbf{d} con un conjunto de parámetros del modelo θ y puede formularse como:

$$\pi(\theta|\mathbf{d}) = \frac{\pi(\mathbf{d}|\theta) \cdot \pi(\theta)}{\pi(\mathbf{d})} \quad (1)$$

donde $\pi(\mathbf{d}|\theta)$ se denomina función de verosimilitud y explica la probabilidad de observar los datos experimentales \mathbf{d} dados los parámetros del modelo θ , $\pi(\theta)$ representa el conocimiento previo disponible sobre los parámetros desconocidos del modelo θ , $\pi(\mathbf{d})$ es una constante normalizadora llamada evidencia, y $\pi(\theta|\mathbf{d})$ es la

distribución posterior, que es la solución del problema inverso, ya que explica los valores θ pueden tomar para explicar los datos observados d .

JUSTIFICACIÓN

La determinación del comportamiento estático-dinámico de una estructura bajo una carga determinada es un tema fundamental de la investigación en diseño estructural, así como el seguimiento de la salud estructural de lo ya construido. En este estudio se desarrolló un programa de ajuste aplicado a la modelización por elementos finitos (EF) con el objetivo de representar el comportamiento real de una estructura y parametrizarlo de manera óptima. La consideración de la anisotropía y la irregularidad en los elementos estructurales que se utiliza comúnmente en la creación de modelos matemáticos, causan propagación de incertidumbre paramétrica, la cual requiere especial atención cuando se desean utilizar modelos no deterministas. La metodología de ajuste a partir de inferencia Bayesiana será implementada y explicada usando un pórtico de tres niveles cuyas variables de entrada son el módulo de elasticidad (E) y la masa (m) como el mostrado en la Fig. 1.

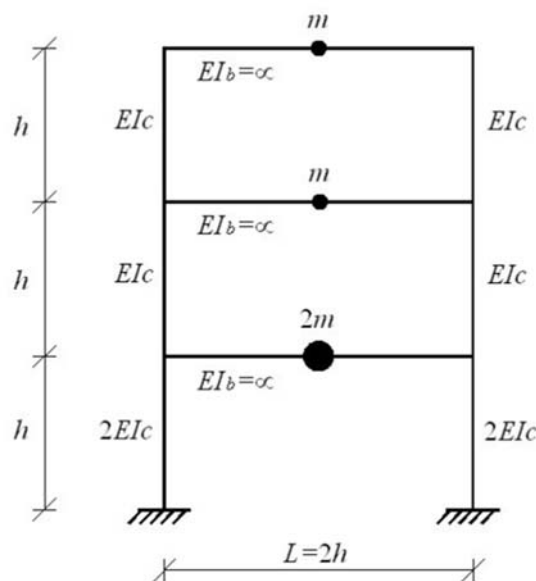


Figura 1. Pórtico a cortante de tres niveles en dos dimensiones

En general, se suelen utilizar modelos deterministas, aquellos que producirán siempre la misma salida única a partir de las mismas condiciones de partida o estado inicial, porque requieren menos cálculos para llegar a una respuesta. A diferencia de los modelos estocásticos o probabilísticos, que dependerán de una componente aleatoria

en muchos casos, o, en el caso que se trabajará en esta tesis, dependerán de la incertidumbre inherente al material de construcción, que vendrá determinada por una serie de ensayos ya realizados.

Por otro lado, en el ámbito de la evaluación e identificación de daños en la monitorización de la salud estructural, el ajuste bayesiano del modelo de elementos finitos (EF) se convierte en una aproximación atractiva, ya que, se estudia un método de calibración de los modelos de EF basado en la Inferencia Bayesiana y el Método de Montecarlo basado en cadenas de Markov, que permite, mediante algoritmos de inteligencia artificial, evaluar la respuesta de la estructura, dado algún nivel de daño. Esta es sólo una de las aplicaciones que se le pueden dar a los algoritmos de inteligencia artificial, aplicados al ajuste de estructuras reales, que, si se mejoran los resultados del tiempo de ajuste, pueden convertirse en una alternativa para los ingenieros de estructuras, dada la cantidad de información previa que se puede agregar experimentalmente, así como la cantidad de información que entrega el modelo una vez ajustado sobre su comportamiento real.

RESULTADOS

En este caso, a partir de datos experimentales de análisis modal creados con el modelo matemático y cierto nivel de ruido, se realizó un ajuste de los parámetros de entrada haciendo uso de un código en Python. La distribución prior utilizada para cada uno de los parámetros del modelo, m_x y E , son mostradas en las figuras 2 y 3, respectivamente. Para el parámetro de masa (m_x) fue utilizada como prior una distribución uniforme con límites en 0.10 y 0.15 slugs, mientras que para el parámetro de módulo de elasticidad (E) se optó por una distribución normal con valores de promedio y desviación estándar de 30000.0 ksi y 5000.0 ksi, respectivamente. Además, se muestra una comparación de esta distribución previa con las obtenidas una vez el modelo de elementos finitos fue ajustado (posterior).

En la Fig. 4, se puede observar el muestreo y la creación de la tendencia que finalmente llevaría a obtener la distribución posterior que se buscaba. En la Fig. 5, se puede verificar correlación entre las variables de entrada una vez ajustadas, que, en este caso, muestra una clara correlación positiva entre los parámetros.

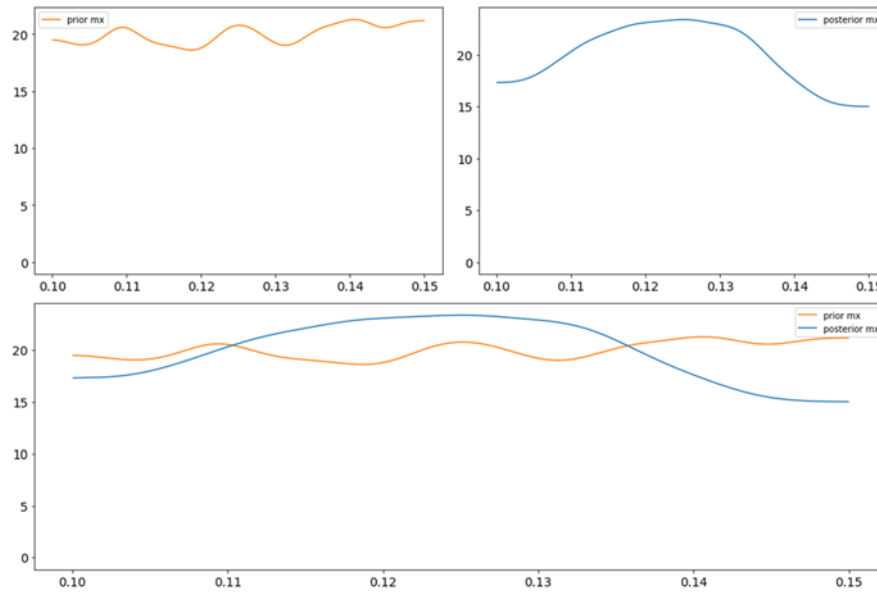


Figura 2. Comparación entre las distribuciones Prior y Posterior para el parámetro m_x en el modelo de elementos finitos

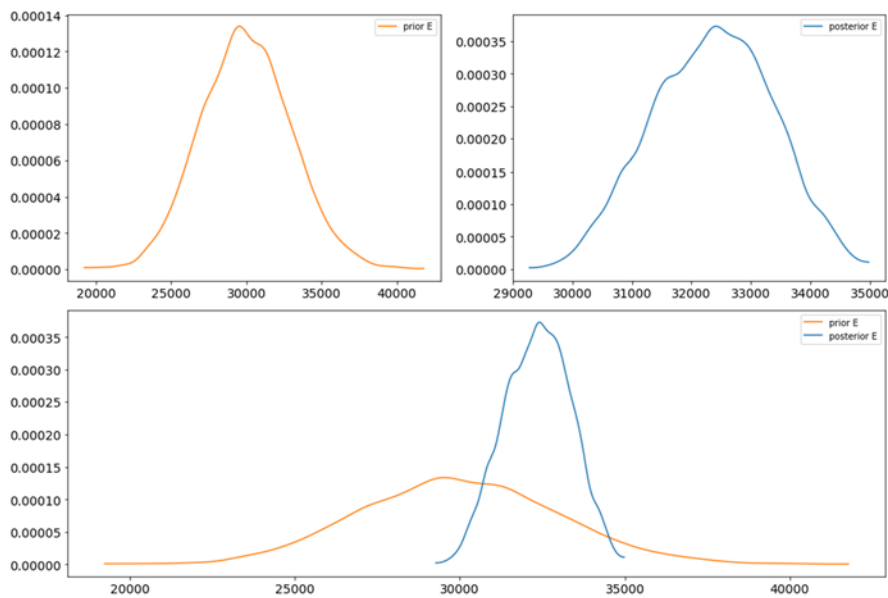


Figura 3. Comparación entre las distribuciones Prior y Posterior para el parámetro E en el modelo de elementos finitos

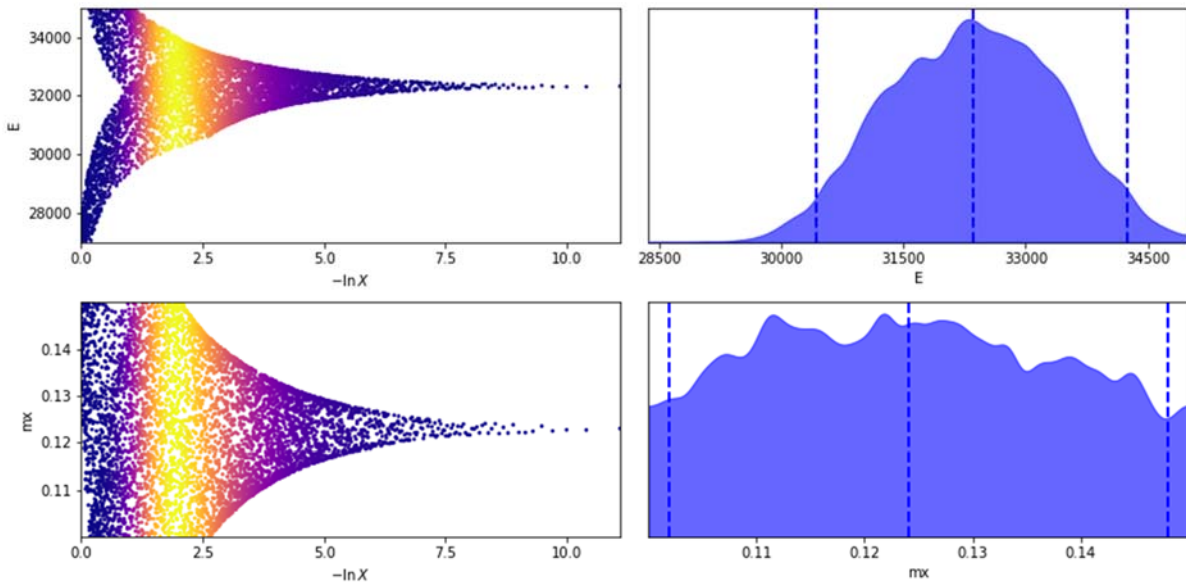


Figura 4. Trazado del ajuste de los parámetros de entrada (Izq.). Funciones de densidad de probabilidad posterior de los parámetros de entrada (Der.).

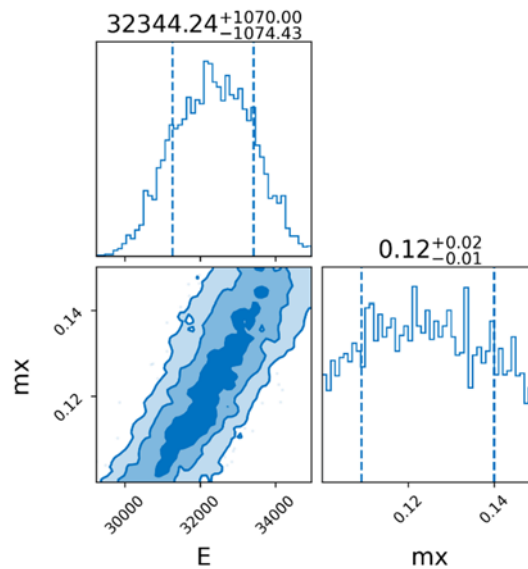


Figura 5. Representación gráfica de la correlación entre las distribuciones posteriores de los parámetros ajustados

Estos resultados son reproducibles en modelos estructurales mucho más complejos, de tres dimensiones y con muchos más grados de libertad. Además de poderse obtener mucha más información, como los intervalos de confianza, que nos darían un

margen numérico porcentual de seguridad basado en la cuantificación de la incertidumbre, y no en el desconocimiento como el tradicional factor de seguridad.

APLICABILIDAD EN UNA ESTRUCTURA REAL

A partir de un modelo en elementos finitos de un edificio de cinco pisos en California (Fig. 5), sus datos experimentales de modos de vibración y frecuencia asociadas, se aplican métodos de optimización bayesiana de modelos y ajuste de resultados basados en algoritmos de inteligencia artificial, principalmente en Python, más específicamente en BILBY, que es la librería de Python enfocada en la creación de modelos de inteligencia artificial. La finalidad es desarrollar documentación a partir de una investigación acerca de la eficiencia y efectividad de estos algoritmos en el ajuste de modelos estructurales respecto a los que se utilizan actualmente.



Figura 5. Edificación de cinco niveles construido para investigación en el campus de la Universidad de California, sede San Diego

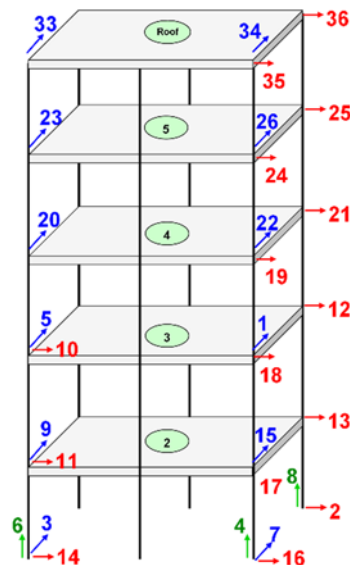


Figura 6. Instrumentación de la edificación de cinco niveles construido para investigación en el campus de la Universidad de California, sede San Diego

En la figura 6 se muestra la posición de los acelerómetros que fueron instalados en la estructura para obtener información de los desplazamientos en los grados de libertad mostrados. Aquellos grados de libertad fueron los que se utilizaron como salida del modelo de elementos finitos correspondiente, de tal manera que los resultados obtenidos experimentalmente y del modelo computacional fuesen comparables.

El modelo de elementos finitos se construyó haciendo uso de un software desarrollado por la Universidad de Berkeley llamado Opensees, en su versión soportada en Python, llamada Openseespy. El modelo fue definido con un parámetro de entrada, el módulo de elasticidad de las vigas. A este parámetro de entrada es necesario incluirle una distribución previa basado en la evidencia y la experiencia del evaluador que funcione como punto de partida para el ajuste (ver Figura 6). En este caso, la distribución prior, se definió como una normal con media igual a 40,000 MPa y una desviación estándar de 10,000 MPa, valores definidos según la literatura⁵.

La salida del modelo se asignó como un vector de 63x1, en el que los primeros tres valores corresponden a las frecuencias asociadas a los modos de vibración y los siguientes 60 elementos del vector corresponden a coordenadas modales de esos tres mismos modos, 20 coordenadas modales por cada modo de vibración. Los datos experimentales y el detalle de los ensayos realizados para su obtención se encuentran documentados en Chen et. Al, 2016⁶.

La función a optimizar se conoce como el *likelihood* de la distribución y se define como se muestra en la Ec. 2. Donde μ y x son los vectores de frecuencias y coordenadas modales experimentales y resultantes del modelo matemático respectivamente, ambos correspondientes a los tres primeros modos de vibración, p es la dimensión de la distribución normal, W es la matriz de peso, Σ es el determinante de la matriz de covarianza Σ y Σ^{-1} es la inversa de la matriz de covarianza, también llamada matriz de precisión.

$$\phi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2} |\Sigma|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}W(x-\mu)} \quad (2)$$

donde x es el vector del set de parámetros obtenidos del modelo matemático, μ es el vector del set de parámetros experimentales, p es la dimensionalidad del modelo, W es la matriz de peso, $|\Sigma|$ denota el determinante de la matriz de varianza-covarianza y Σ^{-1} es la inversa de la matriz de covarianza. Esta distribución tomará valores máximos cuando el vector x sea igual al vector medio μ , y disminuirá alrededor de ese máximo, siguiendo una forma normal o gaussiana clásica.

El objetivo del ajuste del modelo matemático de la estructura es estimar valor de módulo de elasticidad de las vigas que maximice la función definida anteriormente. En el presente caso, la dimensionalidad del modelo de elementos finitos (p) es 1, y la matriz de peso (W) se asignó como se muestra a continuación:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{20} \end{bmatrix}_{63 \times 63}$$

con el objetivo de darle mayor importancia a las frecuencias asociadas a los modos de vibración que a las coordenadas modales. Las estimaciones se realizaron utilizando un muestreador de conjunto de cadena de Markov Monte Carlo (MCMC). A continuación, se muestran los resultados:

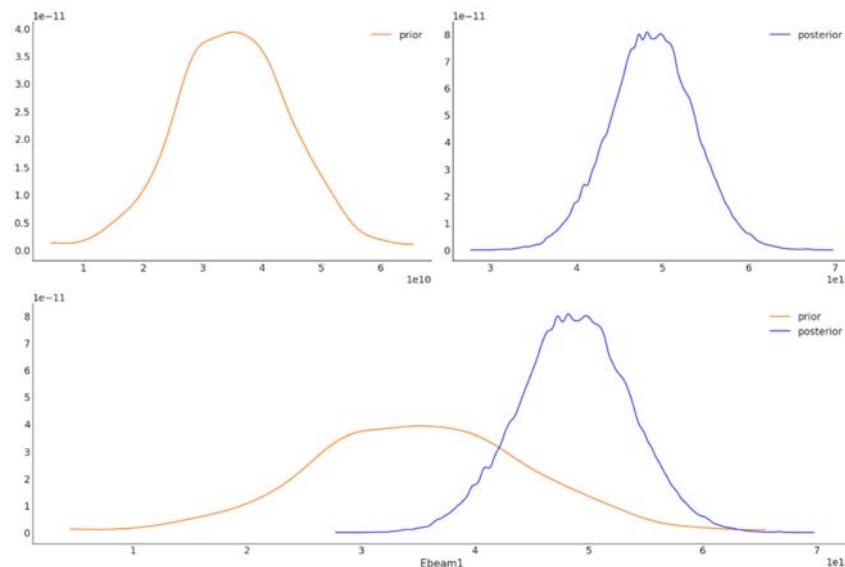


Figura 7. Función de densidad de probabilidad prior y posterior en del módulo de elasticidad de las vigas en Pa.

La distribución posterior obtenida del módulo de elasticidad de las vigas del modelo de elementos finitos corresponde a distribuciones similares a formas normales sin sesgos claros, es decir, distribuciones aproximadamente simétricas. Sin embargo, debido a la distribución prior utilizada, los valores esperados no son los obtenidos, están por debajo de lo estimado, lo que no permite la correcta visualización de estos. Este resultado es interesante debido a que se puede estudiar a profundidad como varían los parámetros de entrada y la incertidumbre asociada a estos en un modelo de elementos finitos, en este caso, pero que puede ser generalizado a cualquier tipo de modelo.

DISCUSIÓN

La presencia de incertidumbres sustanciales en la modelización sugiere que, al resolver problemas inversos en la identificación de sistemas estructurales, el objetivo no debe limitarse a la búsqueda de un único vector de parámetros "óptimos". En lugar de ello, se debería intentar describir la familia de todos los valores posibles de los parámetros del modelo sobre la base de los datos disponibles. La inferencia bayesiana proporciona un instrumento general, racional y robusto que es capaz de manejar la dificultad de las soluciones no únicas⁵. Además, esta metodología trata el problema de la estimación de parámetros utilizando el teorema de Bayes para determinar la

distribución posterior del vector del parámetro con base en los datos disponibles. La probabilidad en la perspectiva bayesiana representa un grado de verosimilitud de una proposición incierta condicionada a la información declarada ⁷. La proposición puede referirse a eventos, parámetros del modelo estructural o incluso al propio modelo. La distribución posterior, por lo tanto, cuantifica la plausibilidad relativa actualizada de los diferentes valores de los parámetros del modelo sobre la base de la información incompleta disponible. De manera similar, la distribución de probabilidad posterior obtenida del teorema de Bayes a nivel de clase del modelo puede utilizarse para cuantificar la plausibilidad de cada clase del modelo dentro de un conjunto de clases candidatas del modelo por su coherencia tanto con los datos observados como con la información previa ⁸.

CONCLUSIONES

Gracias a las investigaciones realizadas y descritas en este artículo, se pudo poner en práctica una metodología de ajuste de modelos estructurales que emplea la inferencia bayesiana. Los modelos de elementos finitos pueden ajustarse con varios parámetros utilizando el algoritmo creado para este estudio, estimando el nivel de incertidumbre relacionado con cada una de las variables de entrada.

Cuando se trata de un modelo multivariable, las funciones de densidad de probabilidad de los parámetros de entrada, así como las correlaciones entre ellos, se determinaron mediante el uso de esta tecnología. A diferencia de una medida de correlación directa entre variables deterministas, como la K. Pearson, la medición de estas correlaciones entre parámetros estocásticos ofrece información sobre el nivel de dependencia que existe entre estas variables.

Los ajustes posteriores producidos a partir de los parámetros de entrada del modelo de elementos finitos corresponden a distribuciones que son aproximadamente simétricas y se asemejan a formas normales sin sesgos evidentes. En los casos revisados, tanto el aplicado a una estructura real como el pórtico a cortante, las distribuciones posteriores poseen una desviación estándar menor respecto a las distribuciones prior, es decir, al final, la incertidumbre asociada a aquellos parámetros es menor de la esperada.

Colaboradores

Oscar David Hurtado Zapata, Albert Ricardo Ortíz Lasprilla PhD, Daniel Gómez Pizano PhD.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad del Valle por permitirme el acceso a la educación superior, a los grupos de investigación Risk y G7, por brindarme acceso a sus equipos y espacios de trabajo, y a los profesores Albert Ortiz y Daniel Gómez, por su guía, acompañamiento y consejo en el desarrollo de este trabajo.

Referencias

- [1] J. Beck, S. K. Au and W. Vanik, "Monitoring structural health using a probabilistic measure" Computer-Aided Civil Infrastructure Engineering, vol. 16, pp. 1-11, 2001.
- [2] K. V. Yuen, Bayesian methods for structural dynamics and civil engineering, first edition, Singapore: John Wiley & Sons, 2010.
- [3] J. Ching, M. Muto and J. Beck, "Structural model updating and health monitoring with incomplete modal data using Gibbs sampler", Computer-Aided Civil Infrastructure Engineering, vol. 21, pp. 242-257, 2006.
- [4] S. Cheung and J. Beck, "Bayesian model updating using hybrid monte carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters", ASCE Journal of Engineering Mechanics, vol. 134, no. 4, pp. 243-255, 2006.
- [5] H. Ebrahimian, R. Astroza, J. P. Conte and R. A. d. Callafon, "Nonlinear finite element model updating for damage identification of civil structures using batch 81 Bayesian estimation", Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 84, pp. 194-222, 2017
- [6] Chen, Michelle C., et al. "Full-scale structural and nonstructural building system performance during earthquakes: Part I—specimen description, test protocol, and structural response." Earthquake Spectra 32.2 (2016): 737-770.
- [7] H. Ebrahimian, R. Astroza, J. P. Conte and T. C. Hutchinson, "Pretest Nonlinear Finite Element Modeling and Response Simulation of a Full-Scale 5 Story Reinforced Concrete Building Tested on the NEES-UCSD Shake Table", Journal of Structural Engineering, vol. 144, no. 3, 2018.
- [8] T. Marwala, "Finite element model updating using computational intelligence techniques", pp. 161-181, 2010.

Colaborador

Gómez Daniel, Profesor Universidad del Valle, Cali. daniel.gomez@correounivalle.edu.co