



MODELO VARIACIONAL PHASE FIELD DE FISURACION PARA MATERIALES CEMENTICIOS

Mariela Luege^a, Lourdes Loretto^b, Antonio Orlando^c

^aCONICET, Inst. de Estructuras, FACET, Univ. Nac. de Tucumán,
mluege@herrera.unt.edu.ar

^bAlumna de la Carrera de Ingeniería Civil, Univ. Nac. de Tucumán, lloretto97@gmail.com

^cCONICET Dep. de Bioingeniería, FACET, Univ. Nac. de Tucumán,
aorlando@herrera.unt.edu.ar

RESUMEN

Los modelos variacionales phase field de fisuración son modelos que han recibido creciente atención como modelos de aproximación a la fractura, ya que pueden reproducir patrones de fisuración complejos, el inicio de la fisuración y su propagación, sin la necesidad de predefinir defectos iniciales y caminos de fisuración.

En el presente trabajo deduciremos la formulación variacional de un modelo gradiente de daño anisótropo con comportamiento diferente en tracción y compresión y un potencial de disipación dependiente del estado, mediante la aplicación de la formulación energética. En dicha formulación, se asume que la propagación de la fisura se obtiene de la evolución cuasi estática de los mínimos globales del funcional energético que tiene en cuenta tanto la energía de almacenada elástica como la energía de disipación asociada con la evolución de β .

Para la validación de la presente formulación, se resuelven dos problemas de referencia en 3D: el ensayo de una viga de mortero a flexión simétrica y el ensayo de una estructura de hormigón en forma de L. Los resultados numéricos se comparan finalmente con los obtenidos experimentalmente.

ABSTRACT

Variational phase field models of fracture have received increased attention as approximation models of fracture given that they can handle evolution of complex crack patterns, crack initiation and propagation without initial defects and prescribed crack paths and can be implemented without any particular consideration of what the crack pattern will be. We will derive a variational formulation for an anisotropic gradient damage model with different behavior at traction and compression and a state-dependent dissipation potential by applying the energetic formulation. In such formulation, it is assumed that crack propagation is described by the quasistatic evolution of global minimizers of the energetic functional which accounts for the stored elastic energy and the dissipation associated with the variation of β . We validate our formulation with two 3D-benchmark problems: a three-point symmetric mortar beam and an L-shaped concrete structure, by comparing the numerical results with the experimental ones.



1. INTRODUCCION

Las fisuras en un elemento estructural pueden interpretarse como superficies donde el campo de desplazamientos puede ser discontinuo. La mecánica de la fractura estudia la nucleación y propagación de las fisuras dentro de un sólido. Los modelos variacionales phase field para fractura han recibido considerable y creciente atención como modelos de aproximación a la fractura a partir de los trabajos de [1,2] donde el concepto clásico de Giriffith de tasa crítica de liberación de energía es reemplazada por el principio de mínima energía, permitiendo capturar aspectos característicos del proceso de fractura.

En las formulaciones variacionales las fisuras vienen representadas por una variable continua, llamada variable phase field, la cual puede identificarse con la variable β de daño que describe las fases dañadas y no dañadas. Su propagación sin embargo se describe mediante la evolución cuasi-estática de los puntos críticos de un funcional energético que tiene en cuenta de la energía elástica de deformación o acumulada y la disipación asociada con la variación de β . Formulaciones phasefield pueden manejar la evolución de patrones complejos de fisuración, pueden tener en cuenta el inicio de la fisuración y propagación sin defectos iniciales y un camino de fisuración preestablecido y puede implementarse sin consideración particular de cómo será el patrón de fisuración. Ello es debido a que lo que se busca son puntos críticos de funcionales definidos sobre espacios de Sobolev, los cuales pueden fácilmente discretizarse mediante espacios estándar de elementos finitos [3] y la iniciación y propagación resulta de la competición entre términos energéticos diferentes. La formulación variacional puede derivarse fácilmente utilizando el marco teórico general de la formulación energética propuesta por Mielke et al. [4] define al mínimo global como punto crítico que debe considerarse para describir el proceso de evolución.

Desde el punto de vista numérico, el cálculo de mínimos globales del funcional energético discreto, es separadamente convexo en el campo de desplazamientos u y en el campo de la variable de daño β . Como el problema es no convexo, las ecuaciones de Euler–Lagrange representan solo condiciones de estacionariedad, por lo tanto, su satisfacción no puede garantizar la optimalidad global de la solución alcanzada.

En este trabajo presentamos la formulación energética, las condiciones de optimalidad adicionales de las soluciones energéticas discretas que tienen la forma de dos desigualdades energéticas [5], y la correspondiente estrategia numérica para simular el modelo de daño anisótropo phasefield, caracterizado por un comportamiento distinto en tensión y en compresión, con una función de degradación dependiente del estado. Para asegurar que las soluciones energéticas discretas obtenidas verifican las condiciones adicionales de globalidad, la estrategia computacional que se desarrolla es consistente con el paradigma de modelación de evolución a lo largo de minimizadores globales, para lo cual aplicamos la estrategia de backtracking en el contexto de minimización alternada del funcional energético separadamente convexo.



Luego de esta breve introducción, en la siguiente sección se presenta la formulación energética del modelo phasefield de fractura continua y luego la aproximación discreta, conjuntamente a los límites energéticos de la solución energética discreta, obtenidos gracias a la propiedad de optimalidad global. La Sección 3 describe el algoritmo de optimización energética, las ecuaciones discretas de elementos finitos y el algoritmo de backtracking utilizado en la estrategia. Finalmente, en la Sección 4 se muestran las aplicaciones del procedimiento completo para la solución de problemas en 3d. Los resultados se comparan con los obtenidos sin el backtracking y con resultados experimentales.

2. FORMULACION ENERGETICA

En esta sección presentamos la formulación continua y discreta de la formulación energética de modelos phasefield de fractura.

2.1 Notación y suposiciones básicas.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n = 1, 2, 3$, un dominio abierto acotado, el cual tomamos como configuración de referencia de un cuerpo homogéneo de material frágil. Denotamos con $\partial\Omega$ el contorno del dominio Ω , y asumimos que $\partial\Omega$ se divide en dos partes: un contorno de Dirichlet $\partial\Omega_D$ y el restante contorno de Neumann $\partial\Omega_N := \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$ donde los desplazamientos \mathbf{w} y tensiones \mathbf{t} están prescritas, respectivamente. El contorno $\partial\Omega$ es tal que la normal exterior \mathbf{n} puede definirse casi en todo el contorno $\partial\Omega$. Asumimos que el campo de desplazamientos \mathbf{u} es pequeño y que el sistema lleva a cabo una evolución cuasi-estática isotérmica sobre el intervalo de interés $[0, T]$, $T > 0$ y una temperatura uniforme en Ω . El estado del sistema está caracterizado por: la deformación lineal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla_s \mathbf{u} := (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$, donde ∇ denota el operador gradiente, y las variables adicionales que introduciremos para captar los efectos de microfisuras en el punto material sobre las propiedades macroscópicas. Como variables adicionales consideramos la variable de campo de daño y su gradiente $\nabla\beta$. La variable de campo β puede tomar valores en $[0, 1]$ con $\beta = 0$ cuando el material no está dañado y $\beta = 1$ para el material completamente dañado, es decir cuando no resiste tensión alguna. El gradiente $\nabla\beta$ se introduce para tener en cuenta la influencia del daño en un punto con daño en su entorno.

Para definir el marco donde se formulara nuestro modelo, introducimos los espacios de Sobolev estándar $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ y $H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ de funciones definidas en Ω con valores en \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$. Denotamos con $\mathcal{V} \subset H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ el espacio de todos los campos de desplazamientos que generan campos de deformaciones compatibles, con $\mathcal{V}_D \subset \mathcal{V}$ el espacio afín de campos cinemáticamente admisibles, es decir, para cualquier $t \in [0, T]$, $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ en $\partial\Omega_D$ en el sentido de la traza, y $\mathcal{V}_{D,0} \subset \mathcal{V}$ el espacio lineal de campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles, es decir, el espacio de campos de desplazamientos $\mathbf{u}_{D,0}$ que verifican las condiciones de borde cinemáticas homogéneas en $\partial\Omega_D$, es decir $\mathbf{u}_{D,0} = \mathbf{0}$ en $\partial\Omega_D$. Introducimos entonces el espacio lineal del campo de daño $\mathcal{B} = \{\gamma \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) : \nabla\gamma \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \partial\Omega_D\}$

2.2 Formulación continua

La teoría energética desarrollada en [4] se aplica a modelos estándar generalizados que son independientes de la velocidad. Las leyes de estado y de evolución de aquellos materiales se definen en términos de solo dos potenciales Ψ y ϕ [6,7,8], con ϕ no-negativa, convexa, y positivamente homogénea con respecto a las variables de evolución. De acuerdo con esta teoría, las ecuaciones que gobiernan pueden describirse en términos del funcional de energía almacenada \mathcal{E} y la distancia de disipación \mathcal{D} .

El funcional de energía de almacenada $\mathcal{E}: [0, T] \times \mathcal{V}_D \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ está definido por

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{z}, \beta) = \int_{\Omega} \Psi(\varepsilon, \beta) dx - \langle \ell(t), \mathbf{z} \rangle \quad (1)$$

donde $\varepsilon = \nabla_s \mathbf{z}$ y el par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la forma lineal del trabajo de fuerzas externas dependientes de tiempo dado por

$$\langle \ell(t), \mathbf{z} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x, t) \cdot \mathbf{z}(x, t) dx + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t}(s, t) \cdot \mathbf{z}(s, t) ds \quad (2)$$

La distancia de disipación $\mathcal{D}: \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ está dado por

$$\mathcal{D}(\beta_0, \beta_1) = \inf_{\beta \in \mathfrak{B}} \left\{ \int_0^1 \mathfrak{R}(\beta(s), \dot{\beta}(s)) ds : \beta(0) = \beta_0, \beta(1) = \beta_1 \right\} \quad (3)$$

donde $\mathfrak{R}: \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ se refiere al funcional de disipación y está relacionado al potencial de disipación vía

$$\mathfrak{R}(\beta, \dot{\beta}) = \int_{\Omega} \phi(\beta(s), \dot{\beta}(s)) dx \quad (4)$$

Comentario 1: El funcional \mathfrak{R} es no-negativo debido a la definición de $\phi(\beta, \dot{\beta})$ que escribimos a continuación.

Nos referimos a $(\mathcal{V}_D \times \mathfrak{B}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ como un Sistema Energético Independiente de la velocidad [4] dado que su especificación define completamente la evolución del modelo en términos de dos condiciones energéticas globales: una condición de balance energético (E) y una condición de estabilidad (S).



Definición 1: Decimos que para cualquier $t \in [0, T]$, $(\mathbf{z}(\cdot, t), \beta(\cdot, t)) \in \mathcal{V}_D \times \mathfrak{B}$ es una solución energética del sistema $(\mathcal{V}_D \times \mathfrak{B}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$, si para todo $t \in [0, T]$, se verifican las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, \mathbf{z}(\cdot, t), \beta(\cdot, t)) + \mathcal{D}(\beta(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, t)) & \quad (E) \\ &= \mathcal{E}(0, \mathbf{z}(\cdot, 0), \beta(\cdot, 0)) + \int_0^t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} (\tau, \mathbf{z}(\cdot, \tau), \beta(\cdot, \tau)) d\tau \end{aligned}$$

$$\forall (\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\beta}) \in \mathcal{V}_D \times \mathfrak{B}, \quad \mathcal{E}(t, \mathbf{z}(\cdot, t), \beta(\cdot, t)) \leq \mathcal{E}(t, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\beta}) + \mathcal{D}(\tilde{\beta}, \beta(\cdot, t)) \quad (S)$$

Consideramos aquí un modelo elástico con daño acoplado definido mediante los potenciales

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) = [g(\beta) + k] \Psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{g_c \ell}{2} |\nabla \beta|^2 + I_{[0,1]}(\beta), \quad (5a)$$

$$\phi(\dot{\beta}, \beta) = \frac{g_c}{\ell} \beta \dot{\beta} + I_{\mathbb{R}^+}(\dot{\beta}), \quad (5b)$$

Donde $I_{\mathbb{R}^+}$ es la función indicador del conjunto \mathbb{R}^+ y está definida por $I_{\mathbb{R}^+}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^+$ y $I_{\mathbb{R}^+}(x) = +\infty$ si $x \notin \mathbb{R}^+$. Usamos la notación $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ y denotamos con $g(\beta)$ la función real de degradación la asumimos que decrece con β , convexa y lipschitziana tal que $g(0)=1$ y $g(1) = 0$. Más aún, k es un parametro pequeño positivo que excluye el daño completo asegurando una rigidez artificial residual de la fase completamente dañada $\beta = 1$. El símbolo g_c es la energía de fractura mientras $\ell > 0$ tiene dimensión de longitud y controla el ancho de la zona de transición de β . Este parámetro se identifica como el parámetro de regularización del modelo variacional de la fractura. Finalmente, Ψ_0^+ y Ψ_0^- constituyen las partes de 'tracción' y 'compresión' de la densidad de energía elástica definidas como sigue:

$$\Psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}^+ \quad \Psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_-^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}^- : \boldsymbol{\varepsilon}^-$$

con λ y μ las constantes elásticas de Lamé, $\boldsymbol{\varepsilon}^\pm = \sum_{a=1}^3 \langle \varepsilon_a \rangle_\pm \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a$, ε_a y \mathbf{n}_a ($a = 1, 2, 3$) las deformaciones principales y direcciones principales de deformación, respectivamente, y $x \in \mathbb{R}$, $\langle x \rangle_\pm = (x \pm |x|)/2$.

Para $\beta \in \mathfrak{B}$ tal que $\dot{\beta} \geq 0$ en Ω y para $t \in [0, T]$, y $0 \leq \beta \leq 1$ en Ω la formulación energética definida para los potenciales (5) se obtiene definiendo los siguientes funcionales

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{z}, \beta) = \int_{\Omega} \left[(g(\beta) + k) \Psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{g_c \ell}{2} |\nabla \beta|^2 \right] dx - \langle \ell(t), \mathbf{z} \rangle, \quad (6a)$$

$$\mathfrak{R}(\beta, \dot{\beta}) = \int_{\Omega} \frac{g_c}{\ell} \beta \dot{\beta} dx, \quad (6b)$$

La relación de la teoría energética con las teorías desarrolladas por [9, 10] podemos encontrarla en [9, 12].

A continuación, para cualquier $t \in [0, T]$, vamos a expresar cualquier campo de

desplazamiento admisible $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ de \mathcal{V}_D como la suma de un elemento fijo de \mathcal{V}_D , por ejemplo la extensión \mathbf{u}_D de \mathbf{w} , y elementos \mathbf{u} de $\mathcal{V}_{D,0}$, es decir escribimos

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_D(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

Como resultado, para describir el funcional de energía almacenada también usaremos la notación $\mathcal{E}(t, \mathbf{u}_D + \mathbf{u}, \beta)$ donde \mathbf{u}_D significando que estamos considerando extensión fija de la condición de Dirichlet.

2.3 Minimización incremental

Los problemas de minimización incremental en el tiempo asociados con el sistema energético independiente de la velocidad (1) y (3) están dados por

Problema 1

Sea $\mathcal{P} = \{0 = t_0, \dots, t_N = T\}, N \in \mathbb{N}$

Para $n = 0, \dots, N - 1$

Dada las cargas externas: $\ell(t_{n+1})$

c.b. Neumann

$$\mathbf{u}_{D,n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_{n+1}) \text{ en } \partial\Omega_D \quad \textit{c.b. Dirichlet}$$

Estado del sistema en t_n : $\beta_n \in \mathcal{B}$

Encontrar $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) \in \mathcal{V}_{D,0} \times \mathcal{B}$ tal que minimice

$$\mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta; \beta_n) := \mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta) + \mathcal{D}(\beta_n, \beta) \quad (7)$$

Sujeto a

$$0 \leq \beta_{n+1} \leq 1 \quad (8a)$$

$$\beta_{n+1} \geq \beta_n \quad (8b)$$

En la notación de (7) y teniendo en cuenta para (5a), sea $R(\beta) = g(\beta) + k$, tenemos las siguientes expresiones de los funcionales \mathcal{E} y \mathcal{D} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, \mathbf{u}, \beta) = & \int_{\Omega} R(\beta) \Psi_0^+ \left(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{D,t} + \mathbf{u}) \right) dx + \int_{\Omega} \Psi_0^- \left(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{D,t} + \mathbf{u}) \right) dx + \\ & \int_{\Omega} \frac{g_c \ell}{2} \nabla \beta \cdot \nabla \beta dx - \langle \ell(t), \mathbf{u}_{D,t} + \mathbf{u} \rangle, \text{ para } t \in \mathcal{P}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}_{D,0} \end{aligned} \quad (9)$$

y



$$\mathfrak{D}: (\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{D}(\beta_1, \beta_2) = \int_{\Omega} \frac{g_c}{2\ell} (\beta_2^2 - \beta_1^2) dx + \int_{\Omega} I_{\mathbb{R}^+}(\beta_2 - \beta_1) dx \quad (10)$$

Comentario 2: La unicidad de minimizadores no está garantizada dado que el funcional (7) es no convexo . Tampoco podemos descartar la presencia de soluciones locales en el sentido de la Definición 1. Si consideramos las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional (7), obtenemos la forma débil del problema incremental de valores al contorno. Ello justifica el planteo del Problema 1 como la formulación de un problema de minimización. Por lo cual podemos escribir

Proposición 1: Si $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ resuelve el Problema 1, entonces $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ es una solución local de modelos (5), es decir $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ resuelve (12)

Sea $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ un solución del Problema 1. Entonces $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ es solución de las siguientes condiciones de estacionariedad

$$D\mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta)[\mathbf{v}] + D\mathcal{D}(\beta_n, \beta)[\mathbf{v}] = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{D,0} \quad (11a)$$

$$D\mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta)[\gamma - \beta] + D\mathcal{D}(\beta_n, \beta)[\gamma - \beta] \geq 0 \quad \text{para todo } \gamma \in \mathbb{C} \quad (11b)$$

Denominamos \mathbb{C} al conjunto convexo de soluciones admisibles para β

$$\mathbb{C} = \{\beta \in \mathfrak{B}: \beta(x) \in [0,1] \text{ en } \Omega \text{ y } \beta \geq \beta_n \text{ en } \Omega\} \quad (12)$$

donde $D\mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta)[\mathbf{v}]$ y $D\mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta)[\gamma]$ son las derivadas de Gateaux del funcional $\mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta)$ con respecto a \mathbf{u} y a β , cuyas expresiones están dadas a continuación

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta)[\mathbf{v}] &= \int_{\Omega} [R(\beta) \sigma_0^+ (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \sigma_0^- (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))]: \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx \\ &+ \int_{\Omega} [R(\beta) \sigma_0^+ (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{D,t})) + \sigma_0^- (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{D,t}))]: \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx \\ &- \langle \ell(t), \mathbf{v} \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

$$D\mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta)[\gamma] = \int_{\Omega} \frac{dR}{d\beta} \psi_0^+ (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_{D,t})) \gamma dx + \int_{\Omega} \frac{g_c \ell}{2} \nabla \beta \cdot \nabla \beta dx$$

$$D\mathcal{D}(\beta_n, \beta)[\mathbf{v}] = 0$$

$$D\mathcal{D}(\beta_n, \beta)[\gamma] = \int_{\Omega} \frac{g_c}{\ell} \beta \gamma dx$$



2.4 Límites energéticos: Condiciones necesarias de optimización global

Las soluciones de problema de minimización incremental gozan de propiedades adicionales, las cuales serán de utilidad para construir el algoritmo de retroceso o *backtracking*. Dichas propiedades adicionales se deducen considerando el papel que juegan $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ como optimizadores globales del Problema 1 y en particular manipulando la condiciones de estabilidad

Proposición 2: Sea $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) \in \mathcal{V}_{D,0} \times \mathbb{C}$ solución del Problema 1 para $n = 0, \dots, N - 1$. Entonces las siguientes desigualdades se verifican

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) - \mathcal{E}(t_n, \mathbf{u}_n, \beta_n) + \mathcal{D}(\beta_n, \beta_{n+1}) \\ \leq \mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}_n, \beta_n) - \mathcal{E}(t_n, \mathbf{u}_n, \beta_n) := UB_{n,n+1} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) - \mathcal{E}(t_n, \mathbf{u}_n, \beta_n) + \mathcal{D}(\beta_n, \beta_{n+1}) \\ \geq \mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) - \mathcal{E}(t_n, \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) := LB_{n,n+1} \end{aligned} \quad (15)$$

Donde $UB_{n,n+1}$ y $LB_{n,n+1}$ son respectivamente los límites superior e inferior de la expresión $\mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) - \mathcal{E}(t_n, \mathbf{u}_n, \beta_n) + \mathcal{D}(\beta_n, \beta_{n+1})$. Detalles de la derivación de las correspondientes expresiones pueden encontrarse en [5].

3. ALGORITMO ALTERNADO DE MINIMIZACION

El método de alternado de minimización consiste en resolver separadamente y secuencialmente la minimización del funcional (7) con respecto a las variables \mathbf{u} y β sobre el conjunto $\mathcal{V}_{D,0}$ y \mathbb{C} , respectivamente, donde \mathbb{C} es un conjunto convexo definido en (12). Para cada intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$, producimos una secuencia $(\mathbf{u}_{n+1}^i, \beta_{n+1}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ donde cada término de la secuencia se obtiene resolviendo los siguientes problemas de minimización

Sea $\beta_{n+1}^0 \in \mathbb{C}$, $i = 0$

$$\text{Encontrar } \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} \in \mathcal{V}_{D,0} \text{ tal que minimice } \mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta_{n+1}^i) \quad (16a)$$

$$\text{Encontrar } \beta_{n+1}^{i+1} \in \mathfrak{B} \text{ tal que minimice } \mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}, \beta; \beta_n) + \frac{1}{\epsilon} \varphi(\beta) \quad (16b)$$

$i \leftarrow i + 1$

Este algoritmo de minimización se ha utilizado en por ejemplo [2,4].

Comentario 3: β_{n+1}^0 representa el valor inicial adoptado de β para comenzar la minimización alternada de $\mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta)$ sobre $\mathcal{V}_{D,0} \times \mathbb{C}$, mientras que β_n se utiliza en la definición de (12) del conjunto convexo \mathbb{C} de soluciones admisibles. En (16b) se



resuelve un problema de minimización sin restricciones donde $\epsilon > 0$ y $\varphi(\beta - \beta_n) = \int_{\Omega} [\beta - \beta_n]_-^2 dx$ es la función de penalización donde $x \in \mathbb{R}$, $[x]_- = (x - |x|)/2$. En efecto, tenemos que

$$\varphi(\beta - \beta_n) = \int_{\Omega} [\beta - \beta_n]_-^2 dx = 0 \Leftrightarrow [\beta - \beta_n]_-^2 = 0 \Leftrightarrow [\beta - \beta_n] = 0 \Leftrightarrow \beta \geq \beta_n$$

Como cada minimización de (16) es un problema de minimización convexo sin restricciones, las correspondientes condiciones de optimalidad, dadas por las ecuaciones de Euler Lagrange, son también condiciones de mínimo y está dada por la siguiente formulación variacional

Para $\epsilon > 0$. Sea $\beta_{n+1}^0 \in \mathbb{C}$, $i = 0$

Encontrar $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} \in \mathcal{V}_{D,0}$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}), \beta_{n+1}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{D,n+1}), \beta_{n+1}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx \quad (17a)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{D,0}$

Encontrar $\beta_{n+1}^{i+1} \in \mathfrak{B}$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{dR}{d\beta} \Big|_{\beta_{n+1}^{i+1}} \psi_0^+ (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} + \mathbf{u}_{D,n+1})) \gamma dx + \int_{\Omega} \frac{g_c}{\ell} \beta_{n+1}^{i+1} \gamma dx \\ + \int_{\Omega} g_c \ell \nabla \beta_{n+1}^{i+1} \cdot \nabla \gamma dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} [\beta_{n+1}^{i+1} - \beta_n]_- \gamma dx \quad \text{para todo } \gamma \in \mathfrak{B} \quad (17b)$$

$i \leftarrow i + 1$

Donde $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta) = R(\beta) \boldsymbol{\sigma}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon})$ con $\boldsymbol{\sigma}_0^{\pm} = \lambda(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})_{\pm} \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^{\pm}$.

3.1 Esquema completo de discretización

En esta sección presentamos las ecuaciones discretas obtenidas mediante la interpolación de Elementos Finitos del desplazamiento y de la variable phasefield de daño. Luego describimos el algoritmo numérico que usamos para encontrar una solución aproximada a estas ecuaciones.

Discretización de elementos finitos Las ecuaciones discretas se obtienen reemplazando los espacio afines dimensionalmente infinitos $\mathcal{V}_{D,0} \times \mathfrak{B}$ de las funciones de prueba (\mathbf{u}, β) y de las funciones de test (\mathbf{v}, γ) con subespacios afines finitos dimensionalmente, los cuales aquí los tomamos como espacios de elementos finitos. Denotemos entonces mediante N_u y N_{β} las funciones de interpolación o de forma de \mathbf{u} y β , respectivamente, mediante \mathbf{U} , $\mathbf{U}_D \in \mathbb{R}^{n_u}$ el grado de libertad de desplazamiento de las funciones de test $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{D,0}$ y de la función de extensión $\mathbf{u}_D \in \mathcal{V}_D$ respectivamente y mediante $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_{\beta}}$ el grado de libertad del campo β . Tenemos las siguientes interpolaciones

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_D^h(\mathbf{x}) = N_u(\mathbf{x})(\mathbf{U} + \mathbf{U}_D) \quad \text{y} \quad \beta^h(\mathbf{x}) = N_{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{A} \quad (18)$$



Consecuentemente

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h(\boldsymbol{x}) = \nabla_s \boldsymbol{u}^h + \nabla_s \boldsymbol{u}_D^h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}_u(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}_D) \quad \text{y} \quad \nabla \beta^h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}_\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A} \quad (19)$$

donde las matrices \boldsymbol{B}_u y \boldsymbol{B}_β las cuales se obtienen diferenciando y combinando las filas de las matrices \boldsymbol{N}_u y \boldsymbol{N}_β , respectivamente.

Identificando con Ω_e^h un elemento genérico de la triangulación \mathcal{T}^h , mediante $\boldsymbol{x}_{e,i}$ el i^{th} punto de Gauss del elemento Ω_e^h y ngp su número, las formulaciones variacionales discretas se re-escriben como un sistema no lineal algebraico de ecuaciones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_u(t_{n+1}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{A}) \\ := \sum_{\Omega_e^h \in \mathcal{T}^h} \sum_{i=1}^{ngp} w_{e,i} j_{e,i} \boldsymbol{B}_u^T(\boldsymbol{x}_{e,i}) [R(\boldsymbol{N}_\beta(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{A}) \boldsymbol{\sigma}_0^+(\boldsymbol{B}_u(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{U}) \\ + \boldsymbol{\sigma}_0^-(\boldsymbol{B}_u(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{U}) + R(\boldsymbol{N}_\beta(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{A}) \boldsymbol{\sigma}_0^+(\boldsymbol{B}_u(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{U}_D) \\ + \boldsymbol{\sigma}_0^-(\boldsymbol{B}_u(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{U}_D))] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_\beta(t_{n+1}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{A}_n) \\ := \sum_{\Omega_e^h \in \mathcal{T}^h} \sum_{i=1}^{ngp} w_{e,i} j_{e,i} \boldsymbol{N}_\beta^T(\boldsymbol{x}_{e,i}) \left\{ \left. \frac{dR}{d\beta} \right|_{\boldsymbol{N}_\beta(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{A}} \psi_0^+(\boldsymbol{B}_u(\boldsymbol{x}_{e,i})(\boldsymbol{U} \\ + \boldsymbol{U}_D)) + \frac{g_c}{\ell} \boldsymbol{N}_\beta(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{A} + \frac{1}{\epsilon} [\boldsymbol{N}_\beta(\boldsymbol{x}_{e,i})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_n)]_- \right. \\ \left. + g_c \ell \boldsymbol{B}_\beta^T(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{B}_\beta(\boldsymbol{x}_{e,i})\boldsymbol{A} \right\} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (20b)$$

Con $w_{e,i}$ y $j_{e,i}$ el peso y valor del determinante del Jacobiano en el punto de Gauss $\boldsymbol{x}_{e,i}$ respectivamente.

Para cada intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$, consideramos la solución de (20) separadamente con respecto a \boldsymbol{U} y a \boldsymbol{A} como sigue

Para $\epsilon > 0$. Sea $\boldsymbol{A}^0 \in \mathbb{R}^{n_\beta}$, $i = 0$

$$\text{Encontrar } \boldsymbol{U}^{i+1} \in \mathbb{R}^{n_u}: \boldsymbol{R}_u(t_{n+1}, \boldsymbol{U}^{i+1}, \boldsymbol{A}^i) = \mathbf{0} \quad (21a)$$

$$\text{Encontrar } \boldsymbol{A}^{i+1} \in \mathbb{R}^{n_A}: \boldsymbol{R}_\beta(\boldsymbol{U}^{i+1}, \boldsymbol{A}^{i+1}, \boldsymbol{A}_n) = \mathbf{0} \quad (21b)$$

$i \leftarrow i + 1$

Que representan las ecuaciones de elementos finitos de las condiciones de estacionariedad para problemas de minimización alternada (6). Resolvemos para las ecuaciones (21) aplicando un método de Newton consistente completo.

3.2 Algoritmo backtracking

El algoritmo de backtracking utilizado en este trabajo es similar al utilizado en [2] para problemas similares. La diferencia es que aquí utilizamos las desigualdades energéticas (14) y (15) las cuales son condiciones necesarias de óptimo global para nuestro problema. La aproximación de elementos finitos de las estimaciones (14) y (15) se escriben como sigue

$$-\eta + LB(t_n, \mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \leq \mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) - \mathcal{E}(t_n, \mathbf{U}_n, \mathbf{A}_n) + \mathcal{D}(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n+1}) \quad (22) \\ \leq UB(t_{n+1}, \mathbf{U}_n, \mathbf{A}_n) + \eta$$

donde η es la tolerancia energética introducida para tener en cuenta la globalidad aproximada de la solución discreta. Las expresiones discretas de los términos energéticos y de los límites inferior y superior, $LB(t_n, \mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1})$ y $UB(t_{n+1}, \mathbf{U}_n, \mathbf{A}_n)$, respectivamente, que aparecen en (22) se obtienen de (14) y (15) teniendo en cuenta (18) y (19). La Figura 1 contiene los pasos necesarios para la implementación de (22) como un posproceso.

Cuando las estimaciones (22) resultan violadas por la solución calculada, retrocedemos a un intervalo de tiempo anterior ya calculado y recomenzamos la minimización alternada (21) con un valor inicial de \mathbf{A} correspondiente al del estado de energía más bajo.

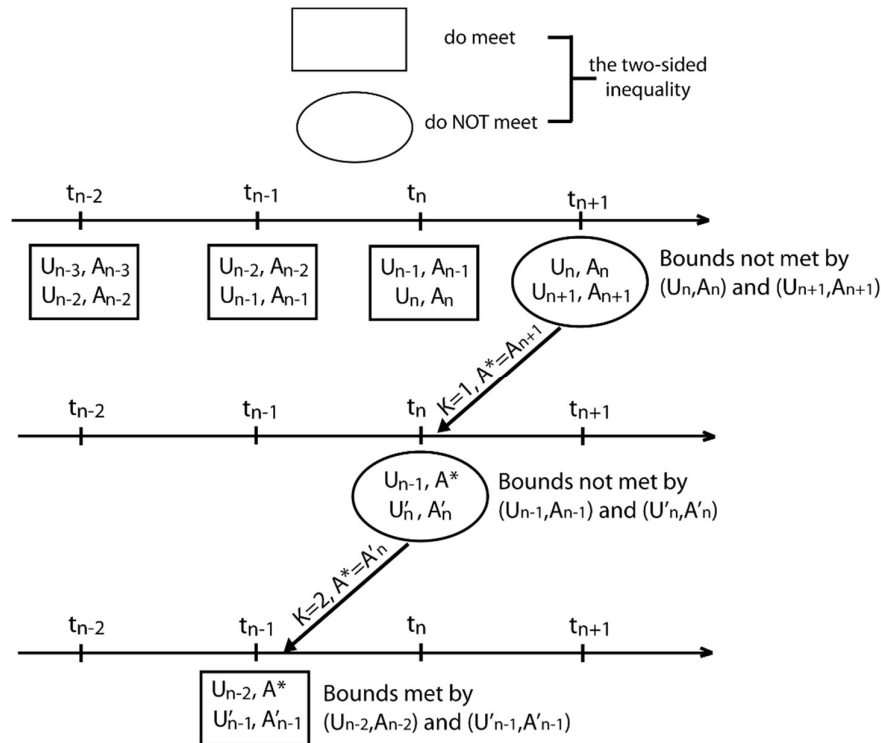


Figura 1. Algoritmo backtracking, utilizando minimización alternada con $K=2$. En cada rectángulo/círculo mostramos el valor inicial y la solución del problema incremental

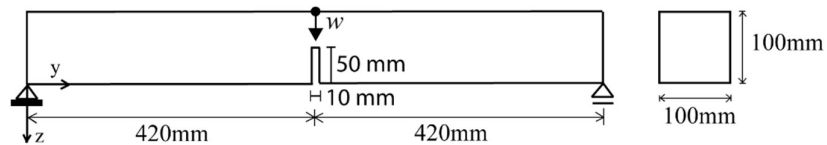
4. EJEMPLOS NUMERICOS

En esta sección, presentamos experimentos numéricos representativos para ilustrar la performance de la formulación energética y su procedimiento numérico para obtener las soluciones energéticas aproximadas. Los problemas que consideramos son

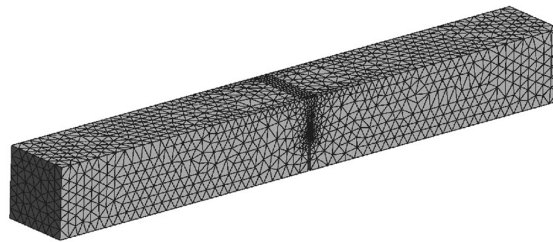
- (i) Ensayo a flexión simétrico en 3d
- (ii) Ensayo panel-L en 3d

4.1 Ensayo viga a flexión simétrica 3D

Consideramos una viga 3D de la Figura 2(a) sujeta a flexión simétrica. Comparamos nuestros resultados numéricos con los resultados obtenidos experimentalmente. Las disposiciones geométricas del ensayo coinciden con las especificaciones dadas en [11] y se muestran en la Figura 2. Las constantes elásticas adoptadas son $E = 39.0kN/mm^2$ y $\nu = 0.15$, la tasa crítica de liberación de energía (o energía de fractura) $g_c = 0.04N/mm$ y la longitud interna $\ell = 15mm$.



(a)



(b)

Figura 2. Ensayo a flexión simétrico 3d (a) Datos geométricos. (b) Malla de elementos finitos no estructurada

La malla de elementos finitos adoptada se muestra en la Figura 2(b) y está formada por 33824 elementos tetraédricos y 6601 nodos. Con el objeto de capturar el patrón de fisuración apropiadamente, se ha refinado la malla en la región donde la fisura se espera que se propague con una longitud de elemento finito característica igual a $h = 1mm = \ell/2$. Los ensayos se realizaron aplicando incrementos controlados de desplazamiento en el punto central de la viga de $\Delta w = 10^{-3}mm$. Denominando F a la fuerza reacción en la condición de borde no homogénea, ubicada en la cara superior

de la viga, la curva carga F -desplazamiento w se muestra en la Figura 3, verificando un buen ajuste con los resultados experimentales de [13]. La variación de energía total de las soluciones calculadas mostradas en Figura 4 muestran que en este caso el esquema estándar de minimización alternada es capaz de identificar las soluciones energéticas cuando el daño comienza a aparecer sin recurrir a backtracking, dado que las soluciones verifican las desigualdades energéticas. Ello ocurre debido a que los límites son bastante amplios. Finalmente, Figura 5 muestra la distribución de daño en la sección transversal $y = 420\text{mm}$ a distintos estadios de deformación, los cuales coinciden con la descripción experimental.

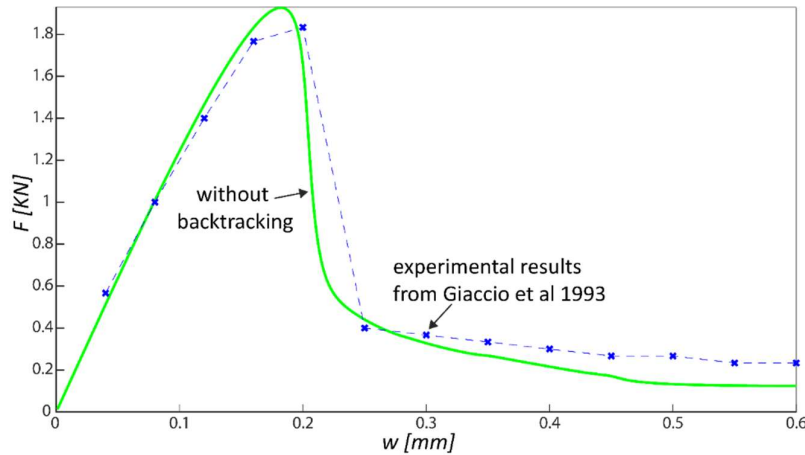


Figura 3. Ensayo a flexión simétrico 3d . Curva carga-desplazamiento asociada con la evolución de las soluciones energéticas aproximadas.

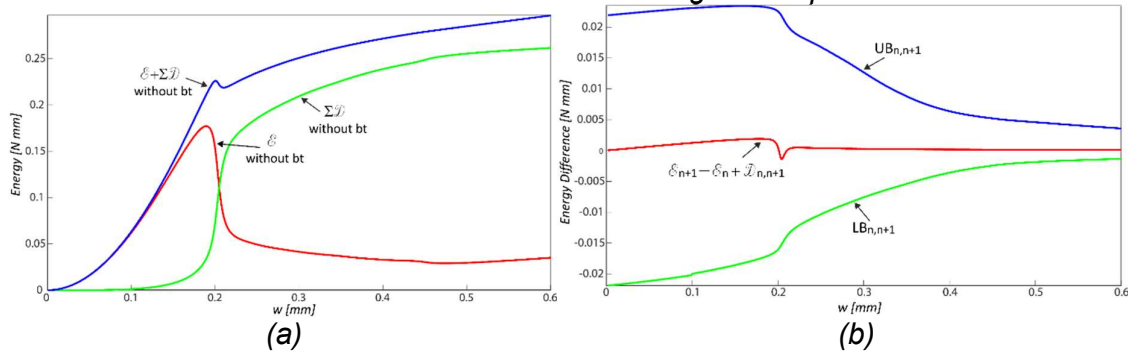


Figura 4. Ensayo a flexión simétrico 3d. Resultados para $\Delta w = 10^{-3}\text{mm}$ (a) Evolución de: la energía total $\mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) + \sum_{i=0}^n \mathcal{D}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{i+1}) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, N - 1$ y (b) de la energía incremental $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n + \mathcal{D}_{n,n+1}$, el límite inferior $LB_{n,n+1}$ y el límite superior $UB_{n,n+1}$ de para $n = 0, 1, \dots, N - 1$. La aplicación estándar de minimización alternada identifica las soluciones energética sin necesidad de recurrir a backtracking.

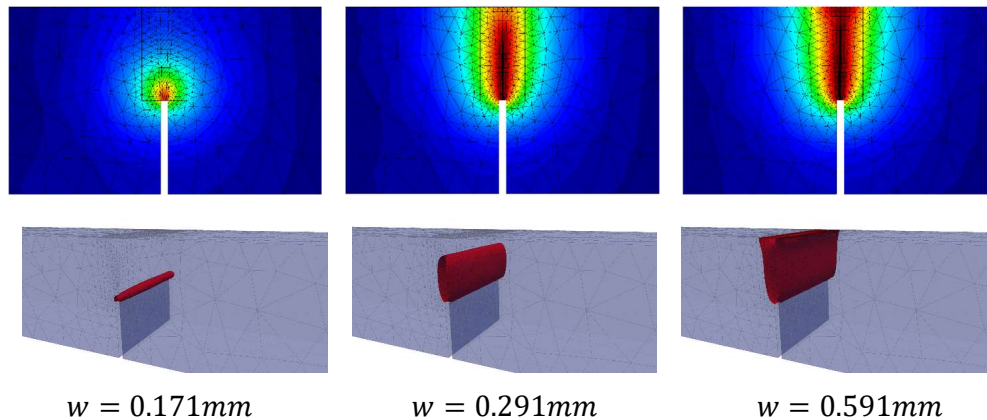


Figura 5. Ensayo a flexión simétrico 3d. Distribución de la variable phasefield de daño en $y = 420mm$ con vistas 3d de líneas isodaño. Rojo oscuro corresponde a $\beta = 1 - \delta$ con $\delta = 10^{-6}$ dado que estamos considerando un perfil de daño parcial, mientras que azul corresponde a material sólido con $\beta = 0$

4.2 Ensayo de un panel-L en 3D

Analizamos la propagación de fisura de un panel-L de hormigón y la habilidad de la formulación variacional de phasefield para describir patrones curvos de fisuración. La geometría y condiciones de borde se muestran en la Figura 6, detalles del ensayo experimental pueden encontrarse en [14]. En la cara $y=0$, todos los puntos se encuentran completamente restringidos (empotrados), mientras que sobre la línea $x = 470mm$, $y = 250mm$, $0 \leq z \leq 100mm$ los desplazamientos v en la dirección y se encuentran restringidos. Los restantes grados de libertad están liberados.

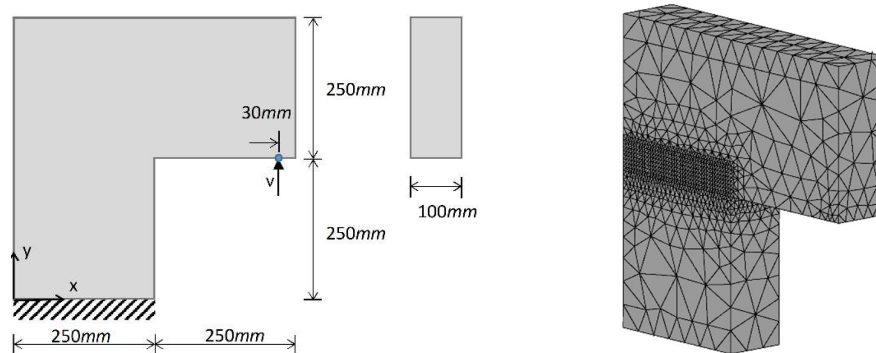


Figura 6. Ensayo panel-L en 3d. (a) Datos geométricos. (b) Malla de elementos finitos no estructurada

Las propiedades materiales del hormigón, dadas en [14], son el Módulo de Young $E = 25.85kN/mm^2$, el coeficiente de Poisson $\nu = 0.18$, la tasa crítica de liberación de energía $g_c = 0.095N/mm$ y la longitud interna $\ell = 20mm$. En la Figura 6(b) se muestra

la discretización espacial realizada con 44880 elementos tetraédricos de tres nodos de donde resultan un total de 68470 nodos. Las simulaciones numéricas se llevaron a cabo aplicando incrementos constantes de desplazamientos $\Delta v = 10^{-3}mm$. Figura 7 muestra las resultantes curvas carga–desplazamiento resultantes utilizando el algoritmo backtracking y no utilizándolo. Notamos que se diferencian en un corto tramo luego del pico. Los resultados se asemejan bastante bien con los obtenidos en la literatura por [15,16] pero se diferencian de manera relevante si se los compara con los resultados experimentales [14] en el valor pico y residual de carga aplicada. Consideramos que esta diferencia en los resultados se debe al modelo cuasi frágil elegido, el cual no tiene en cuenta deformaciones plásticas previas al daño y por el efecto de fuerzas cohesivas en las caras de la fisura como por ejemplo en [14]

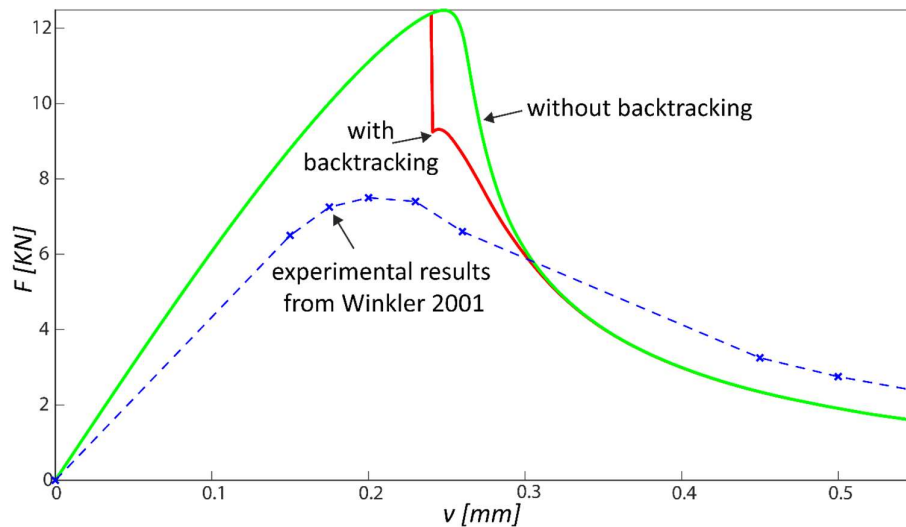


Figura 7. Ensayo panel-L en 3d. Curvas Carga- desplazamiento en el caso en que se activa el algoritmo backtracking y sin activar el algoritmo backtracking.

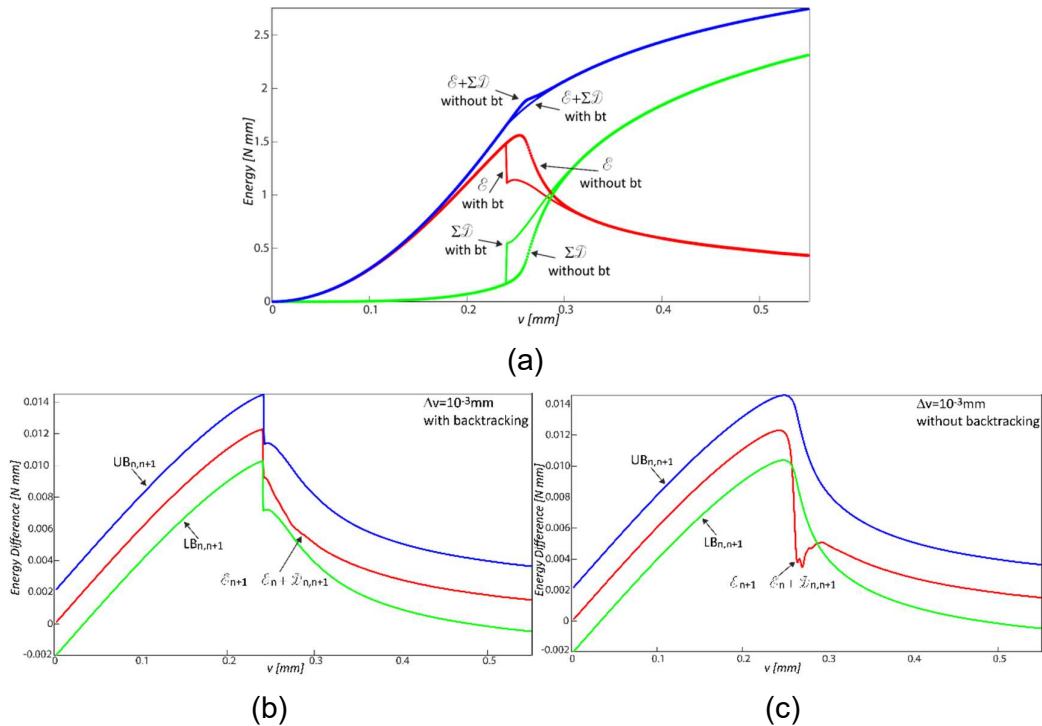


Figura 8. Ensayo panel-L en 3d. Resultados para $\Delta v = 10^{-3}$ mm (a). Evolución de: la energía total $\mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) + \sum_{i=0}^n \mathcal{D}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{i+1}) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Evolución de la energía total sin backtracking ($K=0$) y con backtracking ($K=10$). Evolución de la energía incremental $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n + \mathcal{D}_{n,n+1}$, del limite inferior $LB_{n,n+1}$ y del limite superior $UB_{n,n+1}$ para $n = 0, 1, \dots, N - 1$, (b) sin backtracking ($K=0$) y (c) con backtracking ($K=10$).

La confirmación de dicho comportamiento se obtiene analizando la evolución de la energía total de las soluciones calculadas mostradas en la Figura 8. Las soluciones calculadas con el método de minimización alternada sin backtracking, solo satisfacen las desigualdades energéticas en la etapa inicial y final del ensayo. Se observa por lo tanto que el método de minimización alternada es capaz de detectar un camino de energía menor a lo largo de toda la evolución al cual llamamos soluciones energéticas aproximadas verifican las desigualdades energéticas. Figura 9 muestra la distribución de phasefield en el plano $z = 50$ mm en diferentes etapas del desplazamiento v para los dos esquemas numéricos verificando una evolución más rápida del daño con el algoritmo backtracking que cuando se lo compara con el esquema básico.

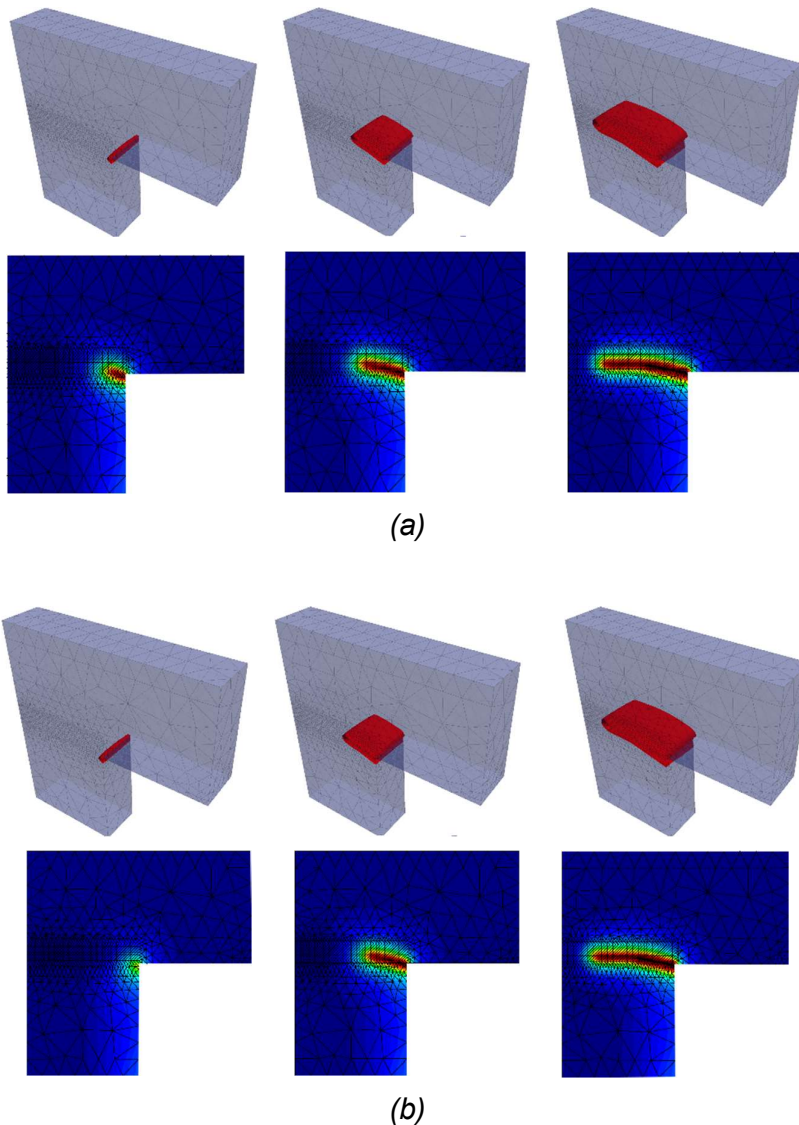


Figura 9. Distribución de la variable phasefield de daño en $y = 420\text{mm}$ con vistas 3d den líneas isodaño. Rojo oscuro corresponde a $\beta = 1 - \delta$ con $\delta = 10^{-6}$ dado que estamos considerando un perfil de daño parcial, mientras que azul corresponde a material solido con $\beta = 0$

Agradecimientos: Los autores agradecen al CONICET y a la Universidad Nacional de Tucumán por el apoyo financiero a través de los proyectos PIP CONICET 101 y PIUNT CX-E625.

Referencias:

[1] Francfort G., Marigo J.-J., Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (1998) 1319-1342.

- [2] Bourdin B., Francfort G., Marigo J. J., The Variational Approach to Fracture. Springer, USA, 2008.
- [3] Quarteroni A., Numerical Models for Differential Problems. Springer Verlag, Milan, 2017.
- [4] Mielke A., T. Roubcek. Rate-Independent Systems. Theory and Application. Springer-Verlag, Berlin, 2015.
- [5] Luege M., Orlando, A variational asymmetric phase-field model of quasi-brittle fracture: Energetic solutions and their computation.. International Journal of Solids & Structures (2020) (*Aceptado*).
- [6] Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S., Non-Linear Mechanics of Materials. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [7] Lemaitre J., Chaboche J.-L., Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press, UK, 1998.
- [8] Nguyen Q. S., Stability and Nonlinear Solid Mechanics. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2000.
- [9] Lorentz E., Andrieux S., A variational formulation for nonlocal damage models. International Journal of Plasticity 15 (1999) 119-138.
- [10] Fremond M., Non-Smooth Thermomechanics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [11] Nguyen Q. S., Quasi-static responses and variational principles in gradient plasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 97 (2016) 156-167.
- [12] Luege M., Orlando A., Almenar M., Pilotta E., An energetic formulation of a gradient damage model for concrete and its numerical implementation. International Journal of Solids & Structures 155 (2018) 160-184.
- [13] Giaccio G., Rocco C., Zerbino R., The fracture energy (G_F) of high-strength concretes. Materials and Structures 26 (1993) 381-386.
- [14] Winkler B., Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes fuer Beton. University Press, Innsbruck, 2001.
- [15] Mesgarnejad A., Bourdin B., Khonsari M. M., Validation simulations for the variational approach to fracture. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 290 (2015) 420-437.
- [16] Brun M. K., Wick T., Berre I., Nordbotten J. M., Radu F. A., An iterative staggered scheme for phasefield brittle fracture propagation with stabilizing parameters. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 361 (2020) 112752.