

VIBRACIONES FLEXO-TORSIONALES DE VIGAS CURVAS LOCALMENTE RESONANTES: ESTIMACIÓN DE “BANDGAPS”

Cortínez, Víctor H.¹; Dominguez, Patricia N.²; Piovan, Marcelo T.³
^{1,2,3} Doctor en Ingeniería

^{1,2,3} Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, UTN,FRBB

^{1,2} Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,

^{1,3} Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina
vcortine@hotmail.com; pdoming@uns.edu.ar; mpiovan@frbb.utn.edu.ar

RESUMEN

En este artículo se analizan las vibraciones flexo-torsionales fuera del plano de vigas de paredes delgadas y eje curvo acopladas a un gran número de resonadores periódicamente ubicados a lo largo de la longitud. Se demuestra que este tipo de estructuras, denominadas localmente resonantes, presentan brechas de banda o bandgaps definidas como rangos de frecuencias libres de resonancias. El modelo estructural se basa en la teoría de Vlasov generalizada para incorporar el efecto de los resonadores mediante propiedades inerciales dependientes de la frecuencia de excitación. Se obtienen fórmulas analíticas para la determinación de los bandgaps y se investigan las propiedades de atenuación dentro de estas bandas mediante un estudio de vibraciones forzadas.

ABSTRACT

In this paper, the flexural-torsional, out of plane, vibration of thin-walled curved beams coupled with many resonators periodically attached along the length is analyzed. It is demonstrated that these structures, called locally resonant structures, present bandgaps defined as ranges of frequencies free of resonances. The structural model is based on the Vlasov theory generalized in order to include the resonators effect by means of sectional inertial properties depending on the excitation frequency. Analytical formulas are obtained for determining the bandgaps and the attenuation properties inside these bands are discussed by means of a forced vibration study.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años hubo un interés creciente en el desarrollo de materiales localmente resonantes debido a su capacidad para atenuar vibraciones. Se trata de materiales artificiales que consisten en una matriz que incorpora microresonadores distribuidos de manera aproximadamente periódica^{1,2,3}.

El mecanismo que hace posible la atenuación de vibraciones u ondas acústicas es, justamente, la vibración interna de los microresonadores que actúan como absorbedores dinámicos. Se han estudiado diferentes metodologías para la fabricación de tales materiales tales como tecnología de fabricación aditiva. Asimismo, este concepto ha sido utilizado para la construcción de estructuras esbeltas localmente resonantes constituidas por vigas o placas suportando una gran cantidad de resonadores (o absorbedores dinámicos) que pueden ser materializados con metodologías constructivas relativamente simples^{4,5,6}. Estas metaestructuras, o estructuras localmente resonantes, encuentran aplicación en diversas áreas de ingeniería mecánica y civil⁷. De hecho, la utilización de absorbedores dinámicos para controlar vibraciones en estructuras esbeltas es una estrategia clásica en varias aplicaciones tales como edificios altos, puentes esbeltas, sistemas de tuberías, etc.^{8,9} La diferencia fundamental entre el enfoque clásico y el de estructura localmente resonante tiene que ver con la cantidad de resonadores implementados en el sistema. Es decir, el enfoque clásico utiliza uno o dos resonadores adecuadamente ubicados de acuerdo al modo de vibración que se desea atenuar mientras que en las estructuras localmente resonantes se utilizan múltiples resonadores distribuidos periódicamente. Cada uno de estos múltiples resonadores tiene una masa mucho menor que la de los clásicos absorbedores de masa sintonizada, lo que puede resultar en ciertas ventajas tales como disminución de las cargas transmitidas por cada resonador a la estructura principal, menor sensibilidad a la precisión de la sintonización de los resonadores, posibilidad de atenuar vibraciones asociadas a modos correspondientes a altas frecuencias. Esta última ventaja hace que las estructuras localmente resonantes encuentren aplicación también en dispositivos de aislación acústica.

Una propiedad muy interesante de las estructuras o materiales localmente resonantes, relacionada con la atenuación de vibraciones, es la formación de bandas de atenuación o “bandgaps”. Éstas corresponden a rangos de frecuencia libres de frecuencias naturales de la estructura, por consiguiente, se espera que las amplitudes de vibración no sean muy grandes en tales bandas.

Se han realizado varios estudios sobre la dinámica de vigas localmente resonantes considerando movimientos flexionales, longitudinales o torsionales^{10,11,12}. En particular, se han desarrollado fórmulas o metodologías numéricas para la estimación de los mencionados bandgaps. Estos estudios se han dirigido a la propagación de ondas en estructuras infinitas y, en menor medida, al análisis de vibraciones estacionarias en estructuras finitas. Recientemente, se ha estudiado el problema dinámico de vigas rectas localmente resonantes de paredes delgadas que presentan un acoplamiento en la dinámica flexo-torsional^{13,14}.

En este trabajo, se presenta una extensión de la investigación previamente

mencionada^{13,14} dirigida a describir la dinámica flexo-torsional de vigas localmente resonantes de pared delgada con eje curvo. Tales tipologías estructurales encuentran un importante potencial de aplicación en diversos sistemas de ingeniería estructural tales como tuberías o puentes. El modelo matemático se formula a partir de la teoría de Vlasov^{15,16} en conjunto con la hipótesis de distribución continua de resonadores a lo largo de su longitud. De esta manera, se obtienen ecuaciones homogeneizadas para las vigas localmente resonantes. La diferencia fundamental de estas ecuaciones respecto a las correspondientes al modelo sin resonadores reside en el hecho de que las propiedades inerciales seccionales resultan dependientes de la frecuencia de excitación. Se analiza la formación de bandgaps y se obtienen fórmulas explícitas para su determinación. Se muestra que las amplitudes de vibración forzada en tales bandgaps son muy pequeñas.

DINÁMICA FLEJO-TORSIONAL DE VIGAS CURVAS LOCALMENTE RESONANTES

Dinámica de vigas curvas con masas vinculadas elásticamente

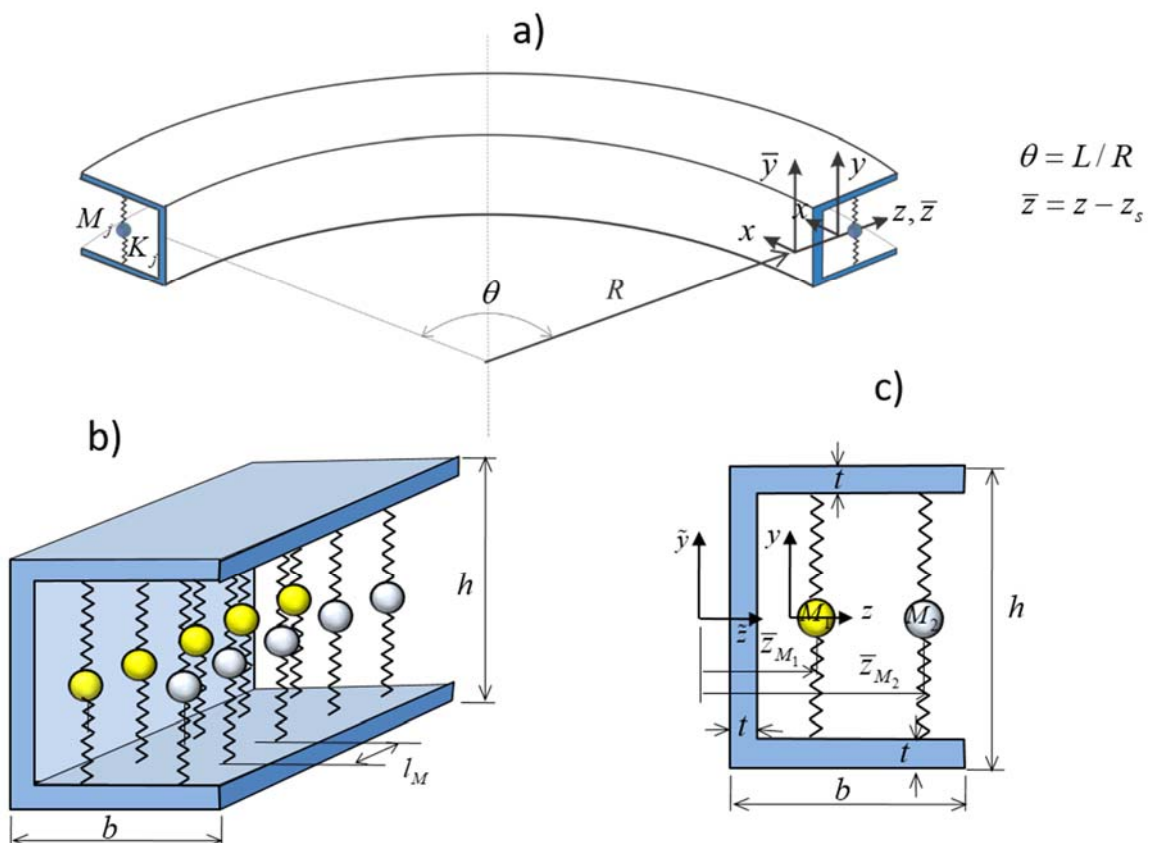


Figura 1: a) Elemento estructural analizado (R : radio al centro de corte de la sección transversal), b) resortes distribuidos longitudinalmente en la viga curva, c) sección transversal de la viga.

Se analiza una viga curva de pared delgada con resonadores masa-resorte acoplados periódicamente en N_s secciones transversales equidistantes. Cada una de estas secciones transversales es simétrica respecto al plano de curvatura y tienen N_r resonadores orientados en la dirección y . Se consideran las vibraciones flexo-torsionales fuera del plano de la estructura sometida a cargas transversales armónicas (en la dirección y). El esquema estructural puede observarse en la Figura 1, donde se muestra como caso particular una sección transversal tipo C. Tal sistema puede ser modelado adecuadamente acoplando las ecuaciones dinámicas de los resonadores a la formulación de Vlasov para la viga curva (estas últimas pueden obtenerse como un caso particular de las presentadas por Dominguez y Cortínez¹⁶ despreciando efectos de corte e inercia rotatoria y de alabeo). Las ecuaciones gobernantes se muestran a continuación:

$$-\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial (T_{sv} + T_w)}{\partial x} + \overline{\rho A} \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + \overline{\rho A z_s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \bar{q}_y \cos(\omega t) + \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_r} K_j \left(\xi_{ji} - (v_s - \bar{z}_{M_j} \phi) \right) \delta(x - x_i)$$

$$-\frac{\partial (T_{sv} + T_w)}{\partial x} + \frac{M_z}{R} + \overline{\rho A z_s} \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + \overline{\rho I_s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \bar{m}_y \cos(\omega t) + \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_r} K_j \bar{z}_{M_j} \left(\xi_{ji} - (v_s - \bar{z}_{M_j} \phi) \right) \delta(x - x_i) \quad (1a-c)$$

$$M_j \frac{d^2 \xi_{ji}}{dt^2} + K_j \xi_{ji} = K_j \left(v_s(x_i, t) - \bar{z}_{M_j} \phi(x_i, t) \right)$$

$$M_z = -\overline{EI}_z \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} - \frac{\phi}{R} \right), \quad B = \overline{EC}_w \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} \right),$$

$$T_{sv} = \overline{GJ} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_s}{\partial x} \right), \quad Q_y = \frac{\partial M_z}{\partial x}, \quad T_w = -\frac{\partial B}{\partial x} \quad (2)$$

$$\overline{EI}_z = \int_A E y^2 F dA, \quad \overline{EC}_w = \int_A E \Omega^2 F dA, \quad \overline{GJ} = \int_A G \left(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{z} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \bar{y} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) dA$$

$$\overline{\rho A} = \int_A \frac{\rho}{F} dA, \quad \overline{\rho A z_s} = \int_A \frac{\rho z_s}{F} dA, \quad \overline{\rho I_s} = \int_A \frac{\rho (\bar{z}^2 + \bar{y}^2)}{F} dA, \quad F = \frac{R}{R + \bar{z}} \quad (3)$$

donde v_s corresponde a la componente del desplazamiento transversal del centro de corte en la dirección y , ϕ es la rotación torsional, ξ_{ji} es el desplazamiento en la dirección de y de la masa j -ésima ubicada en la sección $x = x_i$, M_z, B, T_{sv}, T_w y Q_y corresponden al momento flector con respecto a z , al bimomento, al momento torsor de Saint-Venant, al momento torsor por alabeo y al esfuerzo de corte en la dirección

y, respectivamente, $\overline{EI_z}, \overline{EC_w}, \overline{GJ}$ son las rigideces de flexión, torsión por alabeo y torsión pura respectivamente, $\overline{\rho A}, \overline{\rho I_s}, \overline{\rho A z_s}$ son propiedades seccionales inerciales, M_j y K_j son la masa y la rigidez del absorbedor j -ésimo, \bar{z}_{M_j} es la coordenada con respecto al centro de corte del absorbedor j -ésimo en la sección transversal, z_s es la coordenada del centro de corte con respecto al centroide, \bar{q}_y y \bar{m}_x corresponden a las amplitudes de carga distribuida por unidad de longitud aplicada en el centro de corte y del momento torsor distribuido por unidad de longitud con respecto a centro de corte, R es el radio de curvatura de la estructura correspondiente al centro de corte y $\delta(x-x_i)$ es la función delta de Dirac. Por otra parte Ω es la función de alabeo que puede ser determinada como se indica en las referencias 15 ó 16. El sistema se complementa con las correspondientes condiciones de borde.

Formulación homogeneizada: Teoría de Vlasov para la dinámica de vigas curvas de pared delgada localmente resonantes

Para la carga armónica considerada, la respuesta estructural puede expresarse como: $v_s = V_s(x) \cos(\omega t)$, $\phi = \psi(x) \cos(\omega t)$, $\xi_{ji} = \bar{\xi}_{ji} \cos(\omega t)$. Sustituyendo tales expresiones en las ecuaciones de los resonadores (1c), es posible expresar las amplitudes de desplazamiento de los mismos de la siguiente manera:

$$\bar{\xi}_{ij} = \frac{V_s(x_i) - \bar{z}_{M_i} \psi(x_i)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{M_j}} \right)^2}, \quad \omega_{M_j} = \sqrt{\frac{K_j}{M_j}} \quad (4)$$

donde ω_{M_j} es la frecuencia local del resonador j . Sustituyendo las expresiones (2) y (4) en (1a y b), es posible obtener las ecuaciones de movimiento en términos de V_s y ψ . Considerando además que, para la estructura analizada, el número de secciones transversales N_s es muy grande o, de manera equivalente, la distancia entre secciones con resonadores, l_M , es muy pequeña, se puede asumir que los resonadores se distribuyen de manera continua a lo largo de la estructura (homogeneización). Consecuentemente, las correspondientes ecuaciones de movimiento se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 V_s}{dx^4} \left(\overline{EI_z} + \frac{\overline{EC_w}}{R^2} \right) - \frac{d^2 V_s}{dx^2} \frac{\overline{GJ}}{R^2} + \frac{d^4 \psi}{dx^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} - \frac{d^2 \psi}{dx^2} \left(\frac{\overline{GJ} + \overline{EI_z}}{R} \right) - \omega^2 (\rho A)_{eq} V_s - \omega^2 (\rho A z_s)_{eq} \psi = \bar{q}_y, \\ \frac{d^4 V_s}{dx^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} - \frac{d^2 V_s}{dx^2} \left(\frac{\overline{GJ} + \overline{EI_z}}{R} \right) + \frac{d^4 \psi}{dx^4} \overline{EC_w} - \frac{d^2 \psi}{dx^2} \overline{GJ} + \psi \frac{\overline{EI_z}}{R^2} - \omega^2 (\rho A z_s)_{eq} V_s - \omega^2 (\rho I_s)_{eq} \psi = \bar{m}_x \end{aligned} \quad (5)$$

donde se han definido las siguientes propiedades inerciales:

$$\begin{aligned} (\rho A)_{eq} &= \overline{\rho A} \left(1 + \sum_{j=1}^{N_r} \alpha_j \frac{1}{1 - (\omega / \omega_{M_j})^2} \right) \\ (\rho A z_s)_{eq} &= \overline{\rho A z_s} - \overline{\rho A} \sum_{j=1}^{N_r} \alpha_j \bar{z}_{M_j} \frac{1}{1 - (\omega / \omega_{M_j})^2} \\ (\rho I_s)_{eq} &= \overline{\rho I_s} + \overline{\rho A} \sum_{j=1}^{N_r} \alpha_j \bar{z}_{M_j}^2 \frac{1}{1 - (\omega / \omega_{M_j})^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Observar que las ecuaciones (5) tienen la misma forma para las vigas Vlasov sin resonadores y para las localmente resonantes. La diferencia reside en las propiedades seccionales inerciales dadas por (6) que se reducen a las correspondientes expresiones clásicas de Vlasov cuando $\alpha_j = 0$. Es de importancia fundamental el hecho de que tales propiedades $(\rho A)_{eq}$, $(\rho I_s)_{eq}$ y $(\rho A \bar{z}_s)_{eq}$ dependen de la frecuencia de excitación ω puesto que el análisis de tal dependencia permite demostrar la existencia de bandas de atenuación.

ESTIMACIÓN DE BANDAS DE ATENUACIÓN

Se demuestra a continuación que las vigas localmente resonantes formuladas mediante las ecuaciones (5) y (6) presentan bandgaps en las vibraciones flexo-torsionales fuera del plano. En tales bandas no existen frecuencias naturales y consecuentemente se esperan respuestas forzadas de mínima amplitud.

Para ello, se considera el problema de vibraciones libres de la viga localmente resonante gobernada por las ecuaciones (5) con $\bar{q}_y = \bar{m}_x = 0$ conjuntamente con sus condiciones de borde. Resolviendo tal problema pueden obtenerse las autofunciones V_n y ψ_n correspondientes a la frecuencia ω_n . Tales expresiones pueden relacionarse mediante el cociente de Rayleigh asociado al sistema (5), es decir, por medio de la siguiente expresión:

$$\omega_n^2 = \frac{U_n}{T_n} \quad (7)$$

$$U_n = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\overline{EI}_z \left(\frac{d^2 V_n}{dx^2} - \frac{\psi_n}{R} \right)^2 + \overline{EC}_w \left(\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + \frac{d^2 V_n}{dx^2} \frac{1}{R} \right)^2 + \overline{GJ} \left(\frac{d\psi_n}{dx} + \frac{dV_n}{dx} \frac{1}{R} \right)^2 \right) dx \quad (8)$$

siendo:

$$T_n = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{D}_n^T \mathbf{M} \mathbf{D}_n dx \quad (9)$$

$$\mathbf{D} = [V_n \quad \psi_n]^T \quad (10)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\omega_n) = \begin{bmatrix} (\rho A)_{eq} & (\rho A z_s)_{eq} \\ (\rho A z_s)_{eq} & (\rho I_s)_{eq} \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde U_n y T_n son las correspondientes expresiones de la energía de deformación (máxima) y de la energía cinética (máxima) asociadas al modo n -ésimo. Observar que el primer miembro de (7) es, obviamente, positivo y que también lo es la energía de deformación modal cualesquiera sean las funciones V_n y ψ_n , ya que las rigideces son cantidades positivas. Para que tal expresión tenga sentido la energía cinética T_n debe ser positiva, lo que se cumple cuando la matriz \mathbf{M} , expresada por (9) y (11) es definida positiva.

Si, en cambio, \mathbf{M} es definida negativa, no existe posibilidad de obtener una frecuencia natural de acuerdo al cociente de Rayleigh. Luego, aquellos rangos de frecuencia $\omega = \omega_n$ para los que \mathbf{M} es definida negativa constituyen bandas de atenuación fuertes (SBG).

Por otra parte, cuando \mathbf{M} es semidefinida, si bien no es imposible, la existencia de frecuencias naturales es más improbable puesto que existen restricciones adicionales respecto a las formas modales. Los rangos en los cuáles esto ocurre se denominan bandas de atenuación débiles (WBG).

Para determinar la definición positiva o negativa de la matriz es necesario determinar sus autovalores, es decir, debe resolverse el siguiente problema:

$$(\mathbf{M} - \gamma \mathbf{I}) \mathbf{Z} = 0 \quad (12)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad, γ y \mathbf{Z} son el autovalor y el autovector de la matriz \mathbf{M} . La matriz \mathbf{M} es real y simétrica, por tanto posee dos autovalores reales. Si ambos son negativos, la matriz es definida negativa. Asimismo, si uno es negativo y otro positivo, la matriz resulta indefinida. Resolviendo analíticamente el problema (12) se llega a la siguiente expresión:

$$\gamma_{\max, \min}(\omega) = \frac{(\rho A)_{eq} + (\rho I_s)_{eq} \pm \sqrt{\left((\rho A)_{eq} + (\rho I_s)_{eq} \right)^2 - 4 \left((\rho A)_{eq} (\rho I_s)_{eq} - (\rho A z_s)_{eq}^2 \right)}}{2} \quad (13)$$

Realizando un procedimiento similar al de Rohan¹⁷ es posible demostrar que $\gamma_{\max}(\omega)$ y $\gamma_{\min}(\omega)$ son funciones monótonas crecientes y que $\gamma_{\min}(\omega) \rightarrow -\infty$ cuando $\omega \rightarrow \omega_{M_j}^+$. Como corolario, siempre hay un bandgap, al menos débil, inmediatamente a la derecha de la frecuencia del resonador ω_{M_j} . Consecuentemente, el bandgap fuerte (SBG) o el débil (WBG) pueden determinarse mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} SBG &= \left\{ \omega: \omega > \omega_{M_j} \text{ y } \gamma_{\max}(\omega) < 0 \right\} \\ WBG &= \left\{ \omega: \omega > \omega_{M_j}, \gamma_{\max}(\omega) > 0 \text{ y } \gamma_{\min}(\omega) < 0 \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Luego, es posible determinar numéricamente los bandgaps siguiendo el siguiente procedimiento: se efectúa un barrido de frecuencias posibles ω_n , calculando para cada una de ellas las propiedades inerciales equivalentes mediante (6), luego los autovalores de la matriz \mathbf{M} mediante (13) y finalmente, se determinan los bandgaps mediante (14). Debe observarse que los bandgaps son independientes de las condiciones de borde y del tipo de carga.

En el caso particular en el que todos los resonadores tengan la misma frecuencia $\omega_{M_1} = \omega_{M_2} = \dots = \omega_M$, pueden determinarse las frecuencias límites superiores de los bandgaps ($\omega_{SBG}, \omega_{WBG}$) buscando las raíces de los autovalores (13) ($\gamma_{\max} = 0, \gamma_{\min} = 0$). Operando en tal sentido y considerando (14) es posible determinar de manera analítica los bandgaps de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} SBG &= \{ \omega: \omega_M < \omega < \omega_{SBG} \} \\ WBG &= \{ \omega: \omega_{SBG} < \omega < \omega_{WBG} \} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\omega_{SBG} = \omega_M \sqrt{1 - 1/S_{\min}}, \quad \omega_{WBG} = \omega_M \sqrt{1 - 1/S_{\max}}, \quad \text{para } N_r > 1 \quad (16)$$

$$\text{o } \omega_{SBG} = \omega_M, \quad \omega_{WBG} = \omega_M \sqrt{1 + R_2 / R_3} \quad \text{para } N_r = 1 \quad (17)$$

siendo

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\overline{\rho A}}{\rho I_s} \left(\left(\sum_j \alpha_j \right) \left(\sum_j \alpha_j \bar{z}_{Mj}^2 \right) - \left(\sum_j \alpha_j \bar{z}_{Mj} \right)^2 \right) \\ R_2 &= \left(\sum_j \alpha_j \right) + \frac{\overline{\rho A}}{\rho I_s} \left(\sum_j \alpha_j \bar{z}_{Mj}^2 \right) + \frac{2\overline{\rho A z_s}}{\rho I_s} \left(\sum_j \alpha_j \bar{z}_{Mj} \right) \\ R_3 &= 1 - \frac{\overline{\rho A z_s^2}}{\rho A \rho I_s} \\ S_{\min, \max} &= \frac{-R_2 \mp \sqrt{R_2^2 - 4R_1 R_3}}{2R_1} \end{aligned} \quad (18)$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LAS VIBRACIONES FLEXO-TORSIONALES DE LAS VIGAS CURVAS SIMPLEMENTE APOYADAS

Se considera la estructura localmente resonante gobernada por la ecuación (5) con condiciones de apoyo simple:

$$V_s = \psi = d^2 V_s / dx^2 = d^2 \psi / dx^2 = 0 \quad (19)$$

Es posible determinar una solución analítica del problema expandiendo los desplazamientos y las cargas en series de Fourier:

$$\begin{aligned}
 V_s &= \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin \frac{\pi x}{\lambda_n}, \quad \psi = \sum_{n=1}^N \beta_n \sin \frac{\pi x}{\lambda_n}, \\
 \bar{q}_y &= \sum_{n=1}^N q_n \sin \frac{\pi x}{\lambda_n}, \quad \bar{m}_x = \sum_{n=1}^N m_n \sin \frac{\pi x}{\lambda_n} \quad \text{con } \lambda_n = L/n
 \end{aligned} \tag{20}$$

donde q_n y m_n son los coeficientes de Fourier de la carga externa. Para determinar los coeficientes α_n y β_n se sustituye la expresión (19) en (5) lo que permite obtener los siguientes sistemas de ecuaciones algebraicas lineales para cada valor de n :

$$(\mathbf{K}_n - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X}_n = \mathbf{Q}_n \quad n = 1, 2, \dots \tag{21}$$

donde:

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} \frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \left(\overline{EI_z} + \frac{\overline{EC_w}}{R} \right) + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \frac{\overline{GJ}}{R^2} & \frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \left(\frac{\overline{EI_z} + \overline{GJ}}{R} \right) \\ \frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \left(\frac{\overline{EI_z} + \overline{GJ}}{R} \right) & \frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \frac{\overline{GJ}}{R^2} + \frac{\overline{EI_z}}{R^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_n = \begin{Bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_n = \begin{Bmatrix} q_n \\ m_n \end{Bmatrix} \tag{22}$$

Analíticamente se pueden determinar a partir de (20) los coeficientes α_n y β_n :

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \frac{q_n \left(\frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \frac{\overline{GJ}}{R^2} + \frac{\overline{EI_z}}{R^2} - (\rho I_s)_{eq} \omega^2 \right) - m_n \left(\frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \left(\frac{\overline{EI_z} + \overline{GJ}}{R} \right) - \omega^2 (\rho A z_s)_{eq} \right)}{\Delta_n} \\
 \beta_n &= \frac{m_n \left(\frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \left(\overline{EI_z} + \frac{\overline{EC_w}}{R} \right) + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \frac{\overline{GJ}}{R^2} - \omega^2 (\rho A)_{eq} \right) - q_n \left(\frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \left(\frac{\overline{EI_z} + \overline{GJ}}{R} \right) - \omega^2 (\rho A z_s)_{eq} \right)}{\Delta_n}
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_n &= \left(\frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \left(\overline{EI_z} + \frac{\overline{EC_w}}{R} \right) + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \frac{\overline{GJ}}{R^2} - \omega^2 (\rho A)_{eq} \right) \left(\frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \frac{\overline{GJ}}{R^2} + \frac{\overline{EI_z}}{R^2} - \omega^2 (\rho I_s)_{eq} \right) - \\
 &\quad - \left(\frac{\pi^4}{\lambda_n^4} \frac{\overline{EC_w}}{R} + \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \left(\frac{\overline{EI_z} + \overline{GJ}}{R} \right) - \omega^2 (\rho A z_s)_{eq} \right)^2
 \end{aligned}$$

Por otra parte, pueden de determinarse las frecuencias naturales de la estructura localmente resonante mediante las raíces del determinante del sistema:

$$\Delta_n(\omega) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (24)$$

ESTUDIOS NUMÉRICOS

En esta sección se determinan en forma numérica las bandas de atenuación para dos tipos de secciones. Asimismo, para cada uno de los casos se efectúa un análisis de vibraciones forzadas para verificar la existencia de pequeñas amplitudes dentro de los bandgaps estimados.

Ejemplo 1: Viga localmente resonante con sección abierta en forma de C

Se considera la sección mostrada en la Figura 2 con las siguientes características:

$L = 2m, h = 0.1m, b = 0.04m, t = 0.006m, z_s = -0.020816m, E = 4.5E10 Pa, G = 1.8E10 Pa, \rho = 2650 kg/m^3$. Existen dos resonadores iguales en cada sección ($N_r=2$) con razón de masas $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$. Se obtienen las frecuencias límite ω_{SBG} y ω_{WBG} mediante las fórmulas (15 – 18) para dos ángulos de abertura: $\theta = 1rad$ (Caso 1) y $\theta = \pi/2rad$ (Caso 2). Para el primer caso se ha seleccionado la frecuencia local del resonador $\omega_M = 3207.9 rad/s$ que corresponde al 95% de la tercera frecuencia natural de la estructura huésped (sin resonadores). De la misma manera, para el segundo caso $\omega_M = 3789.5 rad/s$. Para ambos casos, uno de los resonadores se ubica en $\bar{z}_{M_1} = 0.04m$ mientras que la posición del segundo resonador se varía entre $-0.03m \leq \bar{z}_{M_2} \leq 0.04m$. En la Figura 3 se pueden observar los bandgaps para los casos aludidos. Como puede notarse, los comportamientos son cualitativamente similares con anchos de bandgaps fuertes crecientes con la distancia entre ambos resonadores, siendo sus máximos valores (para $\bar{z}_{M_2} = -0.03m$) 432 y 511 rad/s respectivamente. Por su parte, los anchos de bandgaps débiles aumentan de manera inversa a los de los bandgaps fuertes, siendo sus valores máximos de 874 y 1032 rad/s, respectivamente.

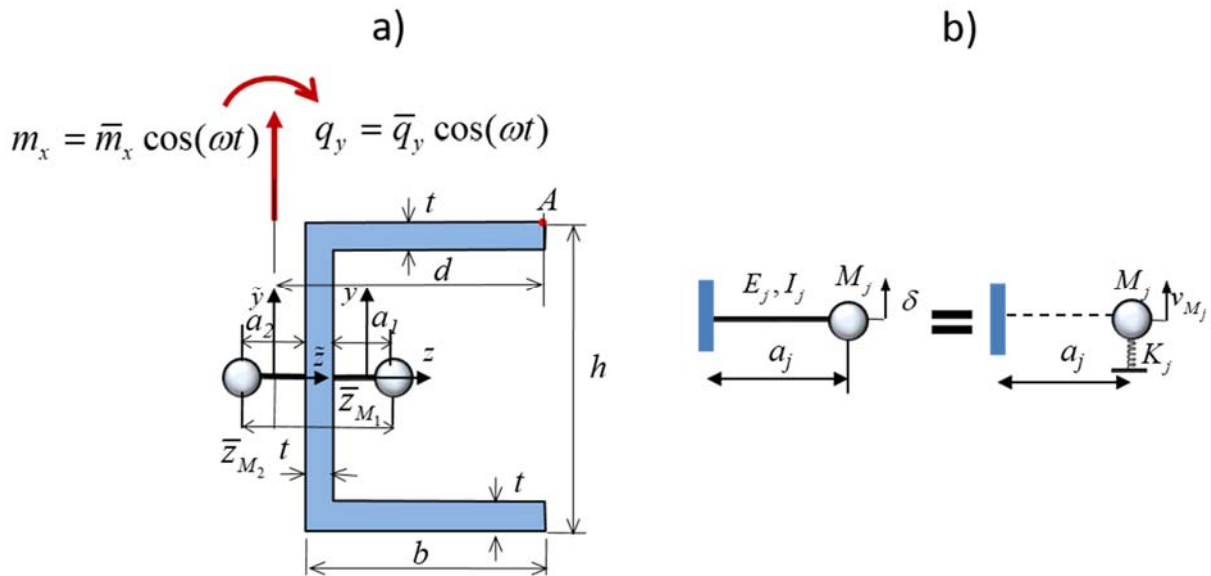


Figura 2: a) Sección transversal de la viga del Ejemplo 1, b) resonador masa-resorte equivalente.

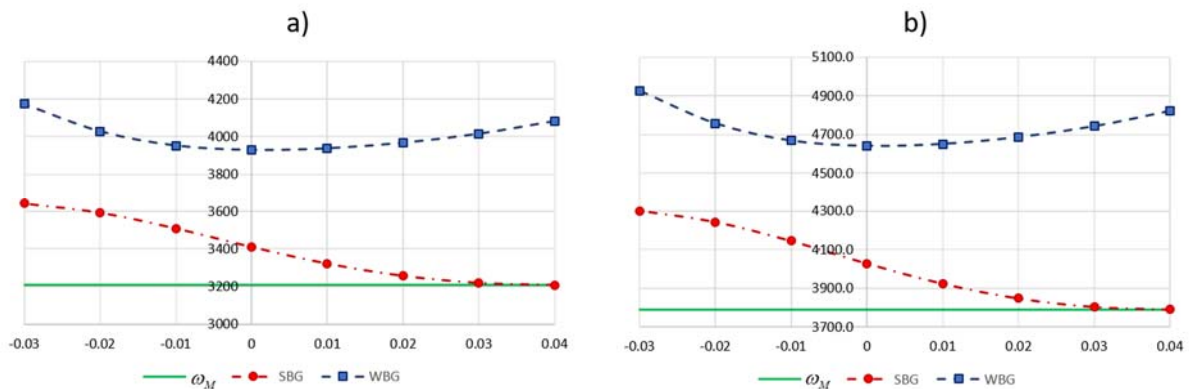


Figura 3: Bangdgaps (SBG y WBG) correspondientes al Ejemplo 1, a) caso 1: $\theta = 1 \text{ rad}$ y $\omega_M = 3207.9 \text{ rad/s}$, b) caso 2: $\theta = \pi/2 \text{ rad}$ y $\omega_M = 3789.5 \text{ rad/s}$.

Se han determinado las vibraciones forzadas utilizando las expresiones (20) y (23) para una carga distribuida por unidad de longitud $q_y = 1000 \cos(\omega t) \text{ N/m}$ aplicada en el centro de corte y un momento distribuido $m_x = 49.7 \cos(\omega t) \text{ Nm/m}$. En la Figura 4 se muestra la respuesta dinámica de la viga localmente resonante para el Caso 1 ($\theta = 1 \text{ rad}$) en inmediaciones de $\omega_M = 3207.9 \text{ rad/s}$, con resonadores ubicados en $\bar{z}_{M_1} = 0.04 \text{ m}$ y $\bar{z}_{M_2} = -0.02 \text{ m}$. También se muestra la respuesta dinámica para la correspondiente estructura huésped (sin resonadores). La Figura 4a muestra el desplazamiento del centro de corte en $x = L/2$, mientras que la 4b

muestra el desplazamiento del punto A en $x = L/2$, para poner en evidencia el efecto torsional. Asimismo, se presentan mediante líneas verticales los límites de los bandgaps débil y fuerte previamente obtenidos. Como se aprecia, las amplitudes de vibración de la viga localmente resonante son mucho menores que las correspondientes a estructura huésped dentro del bandgap fuerte, de hecho, en la viga con resonadores se ha eliminado la respuesta resonante. Esto verifica la ausencia de frecuencias naturales en tal banda como fue demostrado previamente. Sin embargo, en las bandas débiles aparecen resonancias para la viga con resonadores.

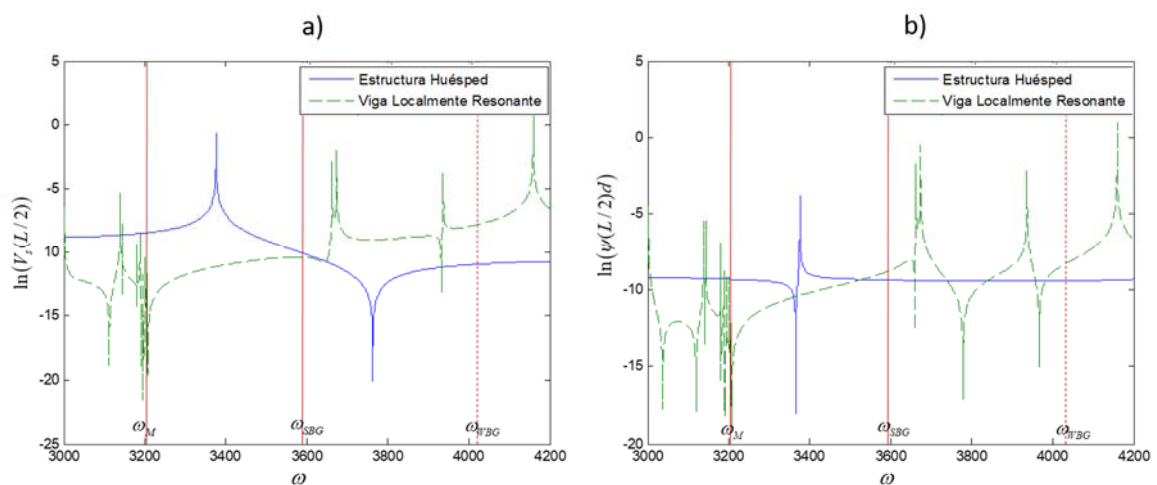


Figura 4: Comparación entre la respuesta dinámica de la viga localmente resonante y la de la estructura huésped del Ejemplo 1 con apoyos simples, carga distribuida $q_y = 1000 \cos(\omega t) \text{ N/m}$ y $m_x = 49.7 \cos(\omega t) \text{ Nm/m}$, $\theta = 1 \text{ rad}$, $\omega_M = 3207.9 \text{ rad/s}$ y resonadores ubicados en $\bar{z}_{M_1} = 0.04 \text{ m}$ y $\bar{z}_{M_2} = -0.02 \text{ m}$; a) $\ln(W_s(L/2))$, b) $\ln(\psi(L/2)d)$

En la Figura 5 se muestran resultados similares para el Caso 2 ($\theta = \pi/2 \text{ rad}$). El comportamiento es cualitativamente similar al del caso anterior.

En la Figura 6 se muestran resultados similares a los de las Figuras 4 y 5 aunque correspondiendo a $\theta = 1 \text{ rad}$ y $\omega_M = 648.6 \text{ rad/s}$ que corresponde al 95% de la frecuencia fundamental de la estructura huésped. Se observa la adecuada atenuación del pico resonante respecto a la estructura huésped.

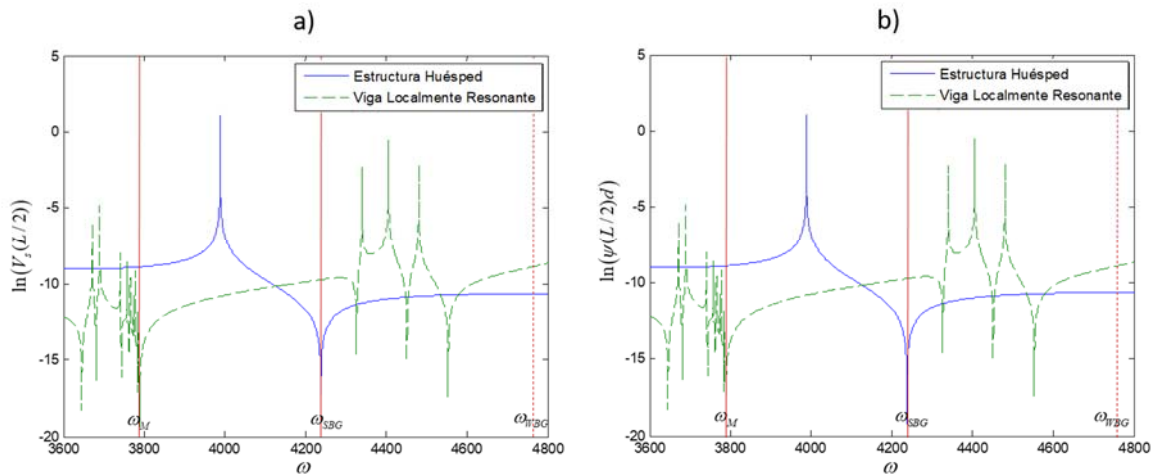


Figura 5: Idem Figura 4 para el Caso 2: $\theta = \pi/2 \text{ rad}$.

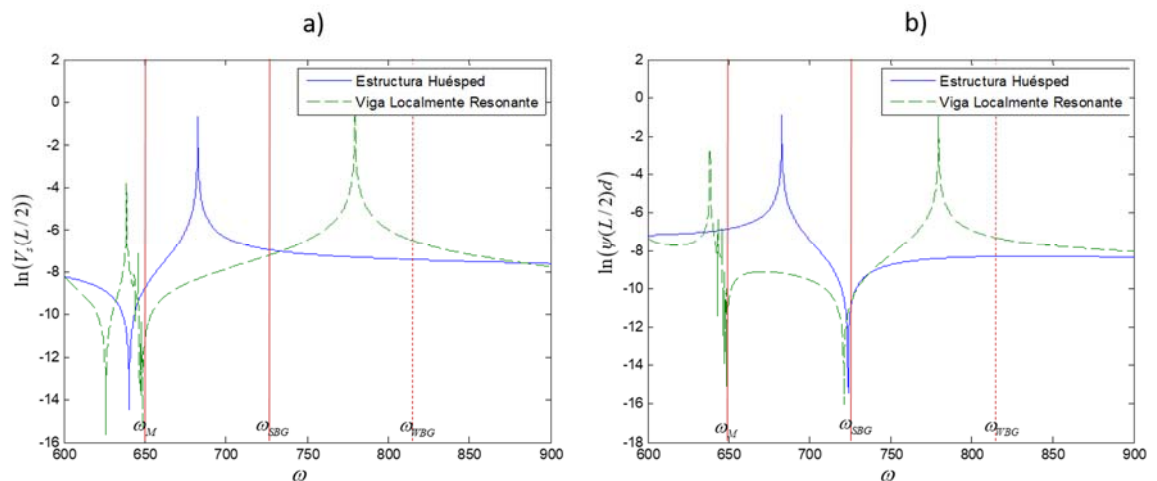


Figura 6: Idem Figuras 4 y 5 para $\theta = 1 \text{ rad}$ y $\omega_M = 648.6 \text{ rad/s}$.

Ejemplo 2: Viga localmente resonante con sección cerrada

Se considera la sección mostrada en la Figura 7 con las siguientes características:

$L = 60 \text{ m}$, $z_s = 0$, $E = 2E10 \text{ Pa}$, $\mu = 0.2$, $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$. Debe notarse que para este ejemplo se ha adoptado, de manera aproximada $y_s = 0$ despreciando el acoplamiento del movimiento en el plano de curvatura con el movimiento fuera del plano. Sin embargo, teniendo en cuenta las dimensiones de la sección tal aproximación es

razonable. Existen dos resonadores iguales en cada sección ($N_r=2$) con razón de masas $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$. Se obtienen las frecuencias límite ω_{SBG} y ω_{WBG} mediante las fórmulas (15 – 18) para una abertura: $\theta = 1 \text{ rad}$ y $\omega_M = 89.4 \text{ rad/s}$. Tal frecuencia es igual al 93% de la segunda frecuencia natural de la estructura sin resonadores. Las ubicaciones de los resonadores son simétricas con respecto al eje y y varían entre 1 y 5 m.

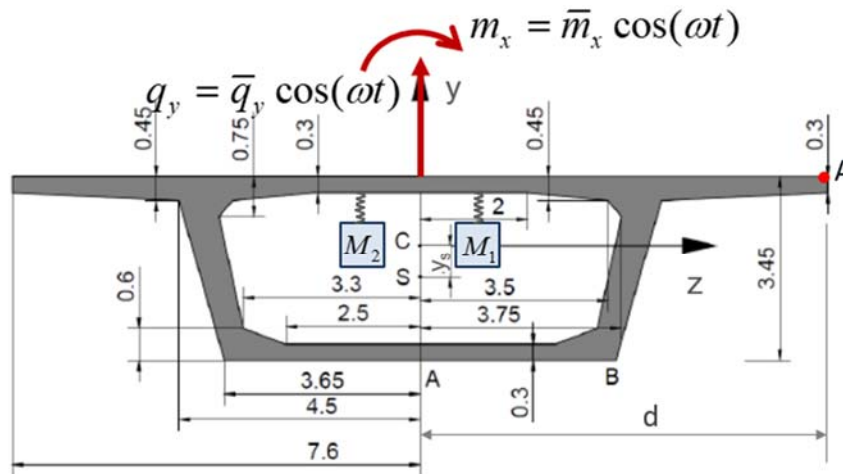


Figura 7: Sección transversal de la viga del Ejemplo 2.

En la Figura 8 se muestran los bandgaps fuertes y débiles para distintas posiciones de los resonadores. Como se aprecia, el bandgap fuerte aumenta junto con la separación entre los resonadores siendo su máximo valor de 20 rad/s . Los bandgaps débiles no muestran una tendencia monótona.

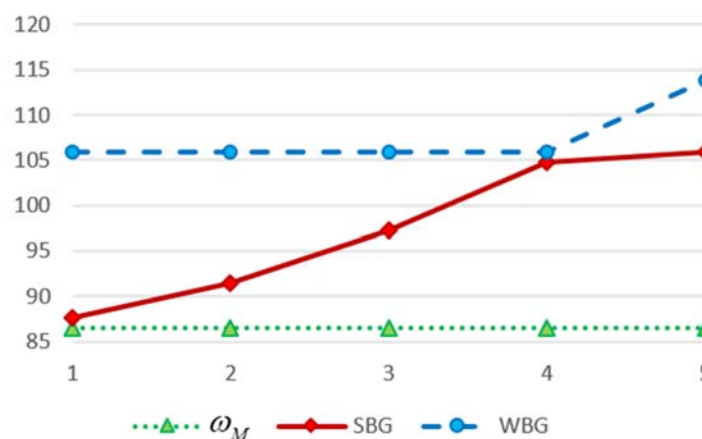


Figura 8: Bandgaps (SBG y WBG) correspondientes al Ejemplo 2 para $\theta = 1 \text{ rad}$ y $\omega_M = 89.4 \text{ rad/s}$.

Se han analizado las vibraciones forzadas de la estructura mencionada considerando una carga $q_y = 1 \cos(\omega t) \text{ kN/m}$ aplicada en el centro de corte y un momento distribuido $m_x = 5 \cos(\omega t) \text{ kNm/m}$. En la Figura 9 se muestra la respuesta en frecuencia para la estructura huésped y para la viga localmente resonante con resonadores ubicados en $\bar{z}_{M_1} = 5 \text{ m}$ y $\bar{z}_{M_2} = -5 \text{ m}$.

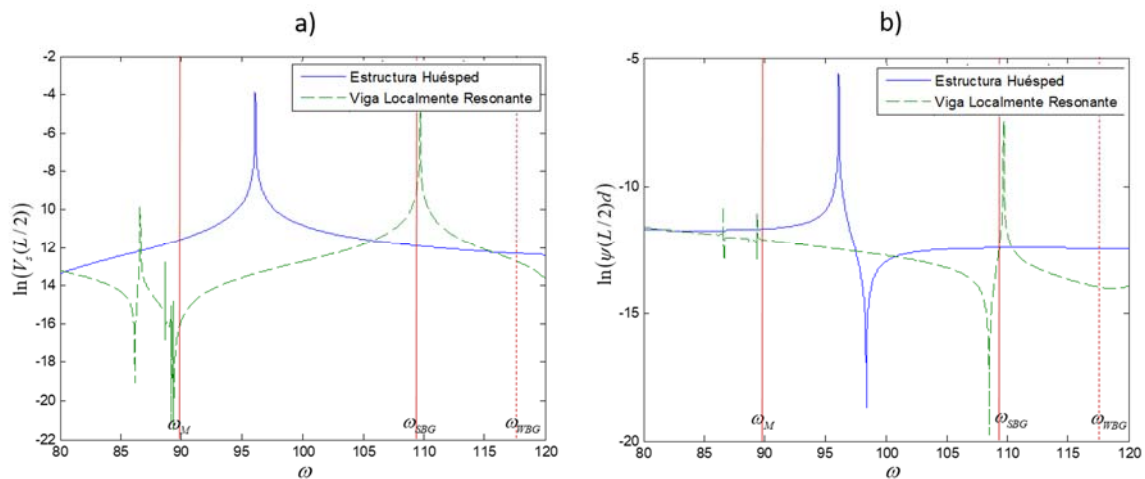


Figura 9: Comparación entre la respuesta dinámica de la viga localmente resonante y la de la estructura huésped del Ejemplo 2 con apoyos simples, carga distribuida $q_y = 1 \cos(\omega t) \text{ kN/m}$ y $m_x = 5 \cos(\omega t) \text{ kNm/m}$, $\theta = 1 \text{ rad}$, $\omega_M = 89.4 \text{ rad/s}$ y resonadores ubicados en $\bar{z}_{M_1} = 5 \text{ m}$ y $\bar{z}_{M_2} = -5 \text{ m}$; a) $\ln(W_s(L/2))$, b) $\ln(\psi(L/2)d)$.

En la Figura 9a) se muestra el desplazamiento en el centro de corte y $x = L/2$ mientras que en la Figura 9b) se muestra el desplazamiento del punto A en $x = L/2$. Como se puede ver, en el bandgap fuerte no aparecen frecuencias naturales porque se atenúa la respuesta de la viga localmente resonante respecto a la de la estructura huésped. Sin embargo, la banda débil no corresponde a un rango de atenuación en este caso. También se han efectuado cálculos similares (no mostrados aquí) para una frecuencia de resonador local cercana a la frecuencia fundamental de la estructura huésped. Si bien también se logra eliminar el pico resonante de la estructura huésped, el ancho del bandgap para este caso es pequeño.

CONCLUSIONES

En este artículo se han estudiado las propiedades de atenuación de vibraciones flexo-torsionales fuera del plano de vigas localmente resonantes con eje curvo. El modelo estructural se basa en la teoría de Vlasov, considerando una distribución continua longitudinalmente de resonadores acoplados. Se ha mostrado que tales estructuras presentan bandgaps (o bandas de atenuación) consistentes en intervalos carentes de frecuencias naturales. Se han obtenido fórmulas analíticas para la determinación de

tales bandgaps. También se ha desarrollado una solución analítica para las vibraciones forzadas de la estructura analizada para condiciones de apoyo simple que ha sido utilizada para verificar la predicción de las fórmulas de bandgaps. La presente formulación puede ser de interés para el diseño de sistemas de control de vibraciones en diversas aplicaciones de ingeniería.

Agradecimientos: El presente trabajo es parte de los proyectos “Atenuación de vibraciones y de propagación de ondas mediante resonadores y metamateriales localmente resonantes” (UTN) y de “Problemas de optimización en ingeniería civil. Parte III (UNS).

Referencias

- 1.- Hussein, M., Leamy, M. y Ruzzene, M. Dynamics of phononic materials and structures, historical origins, recent progress and future outlook. *Applied Mechanics Reviews* 66 (4), 040802, 2014
- 2.- Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y., Yang, Z., Chan, C. y Sheng, P. Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485), 1734–1736, 2000.
- 3.- Auriault, J. y Boutin, C. Long wavelength inner-resonance cut-off frequencies in elastic composite materials. *International Journal of Solids and Structures* 49, 3269-3281, 2012.
- 4.- Sun, H., Du, X. and Frank Pai, P. Theory of Metamaterial beams for Broadband Vibration Absorption, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21, 1086-1101, 2010.
- 5.- Cveticanin, L. y Mester, G. Theory of Acoustic Metamaterials and Metamaterial beams: an overview, *Acta Polytechnica Hungarica* 13 (7), 2016.
- 6.- Sugino, C., Xia, Y., Leadenham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures, *Journal of Sound and Vibration* 406, 104-123, 2017.
- 7.- Casalotti, A., El-Borgi, S., Lacarbonara, W. Metamaterial beam with embedded nonlinear vibration absorbers. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 98, 32-42, 2018.
- 8.- Mokrani, B., Tian, Z., Alaluf, D., Meng, F. y Preumont, A. Passive damping of suspension bridges using multi-degree of freedom tuned mass dampers. *Engineering Structures* 153, 749-756, 2017.
- 9.- Singh, M., Singh, S. y Moreschi, L. Tuned mass-dampers for response control of torsional buildings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, 749-769, 2002.
- 10.- Xiao Y., Wen J., Wen X. Broadband locally resonant beams containing multiple periodic arrays of attached resonators. *Phys Lett A* 376(16), 384–90. 2012.
- 11.- El-Borgi, S., Fernandes, R., Rajendranc, P., Yazbecka, R., Boydb, J. y Lagoudas, D. Multiple bandgap formation in a locally resonant linear metamaterial beam: Theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration* 488 115647, 2020.

- 12.- Wang, K., Zhou, J., Xu, D. y Ouyang, H. Tunable low-frequency torsional-wave band gaps in a meta-shaft. *Journal of Physics D Applied Physics* 11, 1-21, 2018.
- 13.- Dominguez, P. y Cortínez, V. Bandas de atenuación de vibraciones flexotorsionales en vigas localmente resonantes. *Mecánica Computacional* 37, 715-724, 2019.
- 14.- Dominguez, P., Cortínez, V. y Piovan, M. Attenuation bands for flexural-torsional vibrations of locally resonant Vlasov beams. Enviado a publicación, 2022.
- 15.- Vlasov, V. Thin-walled elastic beams, Israel Program For Scientific Translations; 2nd Revised edition, 1961.
- 16.- Dominguez, P. y Cortínez, V. Un modelo estructural Timoshenko-Vlasov para vigas curvas de sección arbitraria construidas con materiales laminados. *Actas de las 25 Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*, Resistencia, Chaco, 2018.
- 17.- Rohan, E., Miara, B. y Seifrt, F. Numerical simulation of acoustic band gaps in homogenized elastic composites *International Journal of Engineering Science* 47(4), 573-594, 2009.