

UN ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISIS NO LINEAL DE VIGAS IMPERFECTAS

⁽¹⁾Jouglard, Claudio E. y ⁽²⁾Perez, Ana Liza

⁽¹⁾Dr. Ingeniero Civil

Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional Buenos Aires.
Universidad Tecnológica Nacional
jouglard@gmail.com

⁽²⁾Ingeniera Civil

Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional General Pacheco.
Universidad Tecnológica Nacional
analizape@yahoo.com.ar

RESUMEN

Las normativas más modernas para el cálculo de estructuras metálicas, como la ANSI/AISC o el EUROCODE, prescriben que para estructuras esbeltas es necesario llevar en cuenta el efecto de imperfecciones o pequeños desvíos de la geometría para el cálculo de las resistencias requeridas de sus miembros. La mayoría de los programas comerciales modelan la geometría imperfecta simplemente desplazando los nodos de la malla de elementos finitos. Esto puede requerir una gran cantidad de elementos, en especial para cáscaras.

En este trabajo presentamos un elemento finito para el análisis no lineal de vigas imperfectas donde las imperfecciones son llevadas en cuenta en la formulación del elemento. Con esto se consigue una reducción de la cantidad de elementos finitos necesarios. Mostraremos las matrices del elemento finito necesarias para efectuar un análisis no lineal como se requiere por las normas.

ABSTRACT

Modern codes for structural steel buildings such as ANSI/AISC or EUROCODE specify that slender structures must be analyzed taken into account the effect of imperfections or small deviations of the geometry to compute the required strength of their members. In the vast majority of commercial software the imperfect geometry is modeled by relocation of the nodes of the finite element mesh. This can require a large number of finite elements, especially for shells.

In this work we present a finite element for the non-linear analysis of imperfect beams. Imperfections are taken into account in the finite element formulation. A great reduction of finite elements is attained. Finite element matrices needed for a non-linear analysis of beams as required by codes will be shown.

1. INTRODUCCION

El comportamiento de inestabilidad estructural se analiza usualmente mediante la determinación de las llamadas cargas críticas de pandeo. En teoría al alcanzar esta carga la estructura se desestabiliza y para cargas menores permanece en situación de equilibrio estable. Si bien este comportamiento es representativo de una gran variedad de tipologías estructurales, existen algunas estructuras laminares, como las cáscaras cilíndricas o circulares, que se desestabilizan a cargas sensiblemente inferiores¹. Es bien conocido que la causa principal de esta discordancia es la sensibilidad de estas estructuras a imperfecciones o pequeños desvíos de la geometría perfecta de la estructura^{1,2,3}.

Luego el tratamiento general de los problemas de inestabilidad debe llevar en cuenta el efecto de pequeñas imperfecciones geométricas en el comportamiento estructural. Para ello debemos considerar la existencia de una configuración inicial libre de tensiones y deformaciones de la estructura aunque con una geometría levemente diferente o "imperfecta" con relación a una configuración de referencia "perfecta".

En los últimos años las normas más modernas como el AISC⁴ y el EUROCODE⁵ han incorporado la posibilidad de modelar directamente las imperfecciones para la verificación de la estabilidad de estructuras metálicas, sustituyendo los análisis clásicos basados en longitudes de pandeo y factores de mayoración.

Los modelos numéricos actualmente en uso que utilizan elementos finitos no contemplan la posibilidad de incluir imperfecciones dentro de cada elemento. En general se recurre a modelar la estructura imperfecta mediante una simple recolocación de los nodos de la estructura perfecta (Fig. 1).

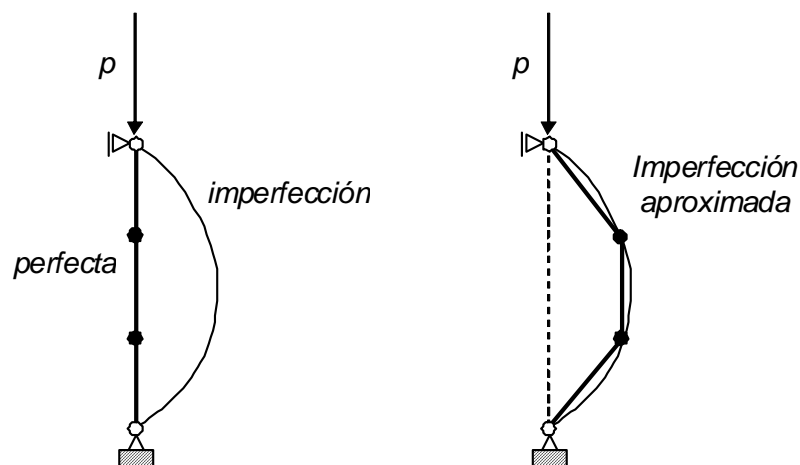


Figura 1. Aproximación de estructuras imperfectas.

Esta representación de las imperfecciones es, en general ineficiente, requiriendo

una gran cantidad de subdivisiones para definir apropiadamente la imperfección.

El objetivo de este trabajo es la presentación de una matriz de rigidez tangente apta para el análisis no lineal de estructuras de vigas imperfectas. La deducción de esta matriz se basa en relaciones entre tensores de deformación simplificadas para elementos con pequeña curvatura, hipótesis usualmente conocida como de vigas abatidas o rebajadas^{7,8}.

2. REPRESENTACION APROXIMADA DE ESTRUCTURAS IMPERFECTAS

Consideremos un sistema estructural que se deforma bajo la acción de cargas adoptando diferentes configuraciones deformadas. Definimos tres tipos de configuraciones para este sistema: 1) configuración de *referencia*, 2) configuración *inicial* y 3) configuración de *deformada* (Fig.2).

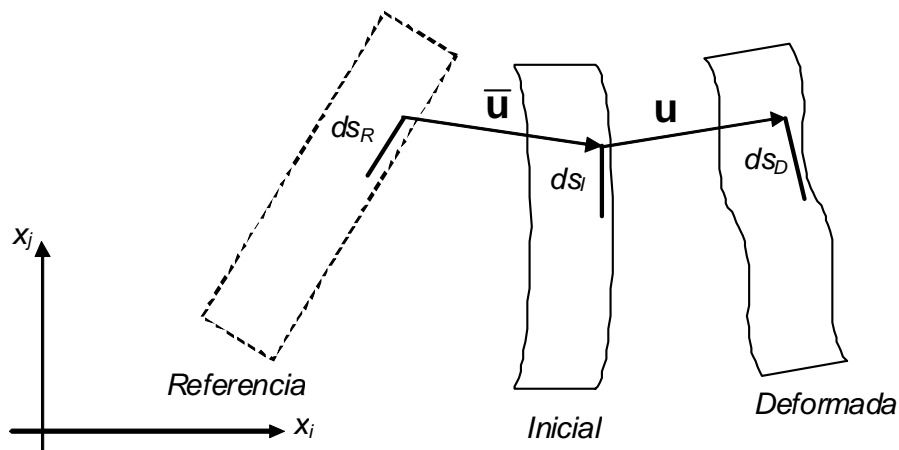


Figura 2. Aproximación de estructuras imperfectas.

La configuración *inicial* se corresponde con el estado inicial libre de cargas y tensiones, si la estructura es imperfecta esta configuración tendrá una geometría curva y compleja. La configuración *deformada* es una configuración equilibrada con el estado de cargas de la estructura. La configuración de *referencia* es una configuración de geometría simple ficticia, en el sentido que no representa un estado deformado de la estructura sino que simplemente será utilizada como un medio auxiliar para simplificar los cálculos.

Asumimos que existe una relación unívoca entre puntos materiales de estas configuraciones de manera que a un punto de una configuración le corresponde únicamente un punto en las otras. Por lo tanto podemos asumir que la configuración *inicial* se puede obtener a partir de aplicar un campo de desplazamientos de *imperfecciones* \bar{u} a la configuración de *referencia*. La configuración *deformada* se obtiene aplicando los desplazamientos de *deformación* u a la configuración *inicial*.

2.1 Deformación de la estructura imperfecta

Si consideramos un segmento ds_R de longitud infinitesimal en la configuración de referencia, este segmento se corresponde con la posición ds_I en la configuración inicial y con la posición ds_D en la configuración deformada. Podemos imaginar que el segmento ds_R de la configuración de referencia fue llevado a la posición ds_I en la configuración inicial mediante la imposición del campo de desplazamientos \bar{u} que deforma a la configuración de referencia de manera de transformarla en la configuración inicial. Resaltemos, que esta deformación es solo ficticia ya que la estructura se encuentra libre de deformaciones y tensiones en la configuración inicial. Luego es posible calcular la diferencia de longitud entre estos segmentos ds_I y ds_R mediante los tensores de deformación de Green ⁶ como:

$$(ds_I)^2 - (ds_R)^2 = 2 E_{ij}^{IRR} dx_i^R dx_j^R \quad (1)$$

Donde se ha empleado la convención de suma sobre índices repetidos y el superíndice R indica que las deformaciones se aplican a puntos materiales de la configuración de referencia. El tensor de deformación de Green E_{ij}^{IRR} mide las deformaciones de la configuración inicial respecto de la configuración de referencia y se define como:

$$E_{ij}^{IRR} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j^R} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i^R} + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_i^R} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_j^R} \right] \quad (2)$$

Donde \bar{u}_i son las componentes del campo vectorial de desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}$ y nuevamente se ha utilizado la convención de suma sobre índices repetidos. El superíndice R indica que las derivadas se aplican a puntos materiales de la configuración de referencia, esto es, los desplazamientos $\bar{u}_i(x_j^R)$ se deben expresar en función de las coordenadas \mathbf{x}^R de puntos materiales de la configuración de referencia. Además adoptamos una convención de tres superíndices para las componentes del tensor de Green, los dos primeros indican entre que configuraciones se miden las deformaciones y el tercero indica a que configuración se refieren las coordenadas de los puntos materiales.

Luego de aplicadas las cargas el segmento ds_I de la configuración inicial pasa a ocupar la posición ds_D en la configuración deformada debido a los desplazamientos u . La diferencia de longitud entre este segmento ds_D y su correspondiente segmento ds_R en la configuración de referencia también se puede expresar mediante tensores de Green como:

$$(ds_D)^2 - (ds_R)^2 = 2 E_{ij}^{DRR} dx_i^R dx_j^R \quad (3)$$

Donde el tensor de deformación de Green E_{ij}^{DRR} mide las deformaciones de la entre la configuración deformada y la configuración de referencia y se define como:

$$E_{ij}^{DRR} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\bar{u}_i + u_i)}{\partial x_j^R} + \frac{\partial(\bar{u}_j + u_j)}{\partial x_i^R} + \frac{\partial(\bar{u}_m + u_m)}{\partial x_i^R} \frac{\partial(\bar{u}_m + u_m)}{\partial x_j^R} \right] \quad (4)$$

Las deformaciones efectivas reales se obtienen de la diferencia de longitud de un mismo segmento que ocupaba la posición ds_D en la configuración deformada y ds_I en la configuración inicial. Restando las ecuaciones (1) y (3) estas deformaciones se pueden expresar como:

$$(ds_D)^2 - (ds_I)^2 = 2(E_{ij}^{DRR} - E_{ij}^{IRR}) dx_i^R dx_j^R = 2E_{ij}^{DIR} dx_i^R dx_j^R \quad (5)$$

Donde

$$E_{ij}^{DIR} = E_{ij}^{DRR} - E_{ij}^{IRR} \quad (6)$$

es el tensor de deformaciones efectivas o reales cuyas componentes se obtienen restando las ecuaciones (4) y (2) resultando

$$E_{ij}^{DIR} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j^R} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^R} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i^R} \frac{\partial u_m}{\partial x_j^R} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i^R} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_j^R} + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_i^R} \frac{\partial u_m}{\partial x_j^R} \right] \quad (7)$$

En forma alternativa las deformaciones efectivas se pueden expresar como

$$(ds_D)^2 - (ds_I)^2 = 2E_{ij}^{DII} dx_i^I dx_j^I \quad (8)$$

Donde el tensor de deformación de Green E_{ij}^{DII} mide las deformaciones de la entre la configuración deformada y la configuración inicial pero en función de los desplazamientos de los puntos materiales de la configuración inicial:

$$E_{ij}^{DII} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j^I} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^I} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i^I} \frac{\partial u_m}{\partial x_j^I} \right] \quad (9)$$

El superíndice I indica que las derivadas se aplican a puntos materiales de la configuración inicial, esto es, los desplazamientos $u_i(x_j^I)$ se deben expresar en función de las coordenadas \mathbf{x}^I de puntos materiales de la configuración inicial.

2.2 Energía de deformación simplificada

Asumiendo que las deformaciones sean pequeñas y que los materiales sean hiperelásticos⁶, la energía de deformación se puede expresar como:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_I} C_{ijkl} E_{ij}^{DII} E_{kl}^{DII} dV_I \quad (10)$$

Donde C_{ijkl} son las componentes del tensor constitutivo del material y la integral se extiende a todo el volumen V_I de la configuración inicial. Notemos que esta integral puede ser muy complicada de evaluar para una estructura imperfecta pues la geometría de la configuración inicial puede ser bastante complicada. Por lo tanto es conveniente realizar una transformación de coordenadas para referir la integral anterior a la configuración de referencia cuya geometría es sencilla.

El diferencial de volumen dV_I de la configuración inicial se puede expresar como

$$dV_I = dx_1^I dx_2^I dx_3^I \quad (11)$$

Por otro lado el diferencial de volumen dV_R de la configuración de referencia se puede expresar como

$$dV_R = dx_1^R dx_2^R dx_3^R \quad (12)$$

Los diferenciales dx^I y dx^R se pueden relacionar usando la regla de la cadena:

$$dx_i^I = \frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^R} dx_j^R \quad (13)$$

Por lo tanto los diferenciales de volumen dV_I , dV_R se relacionan como

$$dV_I = \left| \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial \mathbf{x}^R} \right| dV_R \quad (14)$$

Donde el término entre barras es el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial \mathbf{x}^R} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1^I}{\partial x_1^R} & \frac{\partial x_1^I}{\partial x_2^R} & \frac{\partial x_1^I}{\partial x_3^R} \\ \frac{\partial x_2^I}{\partial x_1^R} & \frac{\partial x_2^I}{\partial x_2^R} & \frac{\partial x_2^I}{\partial x_3^R} \\ \frac{\partial x_3^I}{\partial x_1^R} & \frac{\partial x_3^I}{\partial x_2^R} & \frac{\partial x_3^I}{\partial x_3^R} \end{vmatrix} \quad (15)$$

Luego debemos expresar al tensor E_{ij}^{DII} en función de las coordenadas \mathbf{x}^R de puntos materiales de la configuración de referencia. Comparando las ecuaciones (5) y (8) tenemos

$$(ds_D)^2 - (ds_I)^2 = 2 E_{ij}^{DII} dx_i^I dx_j^I = 2 E_{ij}^{DIR} dx_i^R dx_j^R \quad (16)$$

Los diferenciales dx^R y dx^I se pueden relacionar usando la regla de la cadena:

$$dx_i^R = \frac{\partial x_i^R}{\partial x_j^I} dx_j^I \quad (17)$$

Reemplazando en la ec.(16) resulta

$$2 E_{ij}^{DII} dx_i^I dx_j^I = 2 E_{kl}^{DIR} \frac{\partial x_k^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_l^R}{\partial x_j^I} dx_j^I dx_j^I \quad (18)$$

Por lo tanto las componentes del tensor E_{ij}^{DII} se pueden expresar como:

$$E_{ij}^{DII} = E_{kl}^{DIR} \frac{\partial x_k^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_l^R}{\partial x_j^I} \quad (19)$$

Finalmente sustituyendo estos tensores y el diferencial de volumen dV_I en la energía de deformación tenemos:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_R} C_{ijkl} E_{mp}^{DIR} E_{nq}^{DIR} \frac{\partial x_m^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_p^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_n^R}{\partial x_k^I} \frac{\partial x_q^R}{\partial x_k^I} \left| \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial \mathbf{x}^R} \right| dV_R \quad (20)$$

Hemos conseguido expresar la energía de deformación respecto de la configuración de referencia resultando una expresión bastante complicada. Sin embargo es posible simplificarla considerablemente si asumimos que las deformaciones de imperfección son muy pequeñas.

Notemos que las coordenadas \mathbf{x}^R de un punto material en la configuración de referencia y las coordenadas \mathbf{x}^I del mismo punto material pero en la configuración inicial se hallan relacionadas por los desplazamientos de imperfección como:

$$x_i^I = x_i^R + \bar{u}_i \quad (21)$$

Luego

$$\frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^R} = \delta_{ij} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j^R} \quad (22)$$

Donde δ_{ij} es el delta de Kronecker que vale 1 si los dos subíndices son iguales y 0 si son distintos. Luego si asumimos que las derivadas de los desplazamientos de imperfección son muy pequeñas tenemos

$$E_{ij}^{DII} = E_{kl}^{DIR} \frac{\partial x_k^R}{\partial x_j^I} \frac{\partial x_l^R}{\partial x_j^I} \approx E_{ij}^{DIR} \quad (23)$$

y

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}^I}{\partial \mathbf{x}^R} \right| \approx 1 \quad (24)$$

Resultando la siguiente expresión simplificada para la energía de deformación

$$U \approx \frac{1}{2} \int_{V_R} C_{ijkl} E_{ij}^{DIR} E_{kl}^{DIR} dV_R \quad (25)$$

Notemos que ahora todas las cantidades de la integral están referidas a la configuración de referencia. De aquí en adelante suprimiremos el superíndice R final en los tensores de deformación y en las coordenadas de puntos materiales que siempre se asumirán como siendo de la configuración de referencia.

2.3 Simplificación para rotaciones moderadas y pequeñas deformaciones

El tensor de deformación de Green E_{ij} para un campo de desplazamientos \mathbf{u} es:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right] \quad (26)$$

que se puede expresar como⁶

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{mi} + \omega_{mi})(\varepsilon_{mj} + \omega_{mj}) \quad (27)$$

siendo ε_{ij} el tensor de deformación infinitesimal definido como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (28)$$

y ω_{ij} es el tensor de rotación infinitesimal definido como

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (29)$$

Para rotaciones moderadas es posible asumir que las deformaciones ε_{ij} son infinitésimos de orden superior cuando comparadas con las rotaciones ω_{ij} , luego el tensor de deformación de Green para rotaciones moderadas es:

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \omega_{mj} \quad (30)$$

El tensor de deformaciones efectivas E_{ij}^{DI} es (ec.6):

$$E_{ij}^{DI} = E_{ij}^{DR} - E_{ij}^{IR} \quad (31)$$

Para rotaciones moderadas los tensores E_{ij}^{DR} y E_{ij}^{IR} se pueden expresar como:

$$E_{ij}^{DR} = \varepsilon_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \omega_{mj} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \bar{\omega}_{mj} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \omega_{mj} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \bar{\omega}_{mj} \quad (32)$$

$$E_{ij}^{IR} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \bar{\omega}_{mj}$$

Donde

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (33)$$

$$\bar{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$$

Restando ambos tensores obtenemos el tensor de deformaciones efectivas como:

$$E_{ij}^{DI} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \omega_{mj} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \bar{\omega}_{mj} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \omega_{mj} \quad (34)$$

Notemos que este tensor es lineal en las rotaciones de imperfección $\bar{\omega}_{mj}$ pero no lineal en las rotaciones ω_{mi} .

3. ENERGIA DE DEFORMACION PARA VIGAS IMPERFECTAS

Analizaremos las deformaciones de un elemento de viga bidimensional asumiendo las hipótesis usuales para vigas de mantenimiento de secciones planas antes y después de la deformación para relacionar la posición de un punto material P cualquiera de la viga con los desplazamientos del eje centroidal (Fig.3).

Consideremos un sistema de coordenadas local x,y fijo a la configuración indeformada de la viga con el eje x en la dirección del eje centroidal y una sección perpendicular al eje centroidal por el punto O conteniendo al punto P . Este punto P pasa a ocupar la posición P' en la configuración deformada mediante los desplazamientos u, v según los ejes locales. El punto O del eje centroidal pasa a ocupar la posición O' mediante los desplazamientos u_c, v_c . La sección conteniendo los puntos P y O realiza un giro θ asumido positivo en sentido antihorario. Luego es posible expresar a los desplazamientos u, v del punto P de coordenadas x,y como:

$$u = u_c - y \operatorname{sen} \theta \quad (35)$$

$$v = v_c - y(1 - \cos \theta)$$

Asumiendo que las rotaciones sean pequeñas tenemos

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \approx \tan \theta = \frac{dv_c}{dx} \quad (36)$$

$$\cos \theta \approx 1$$

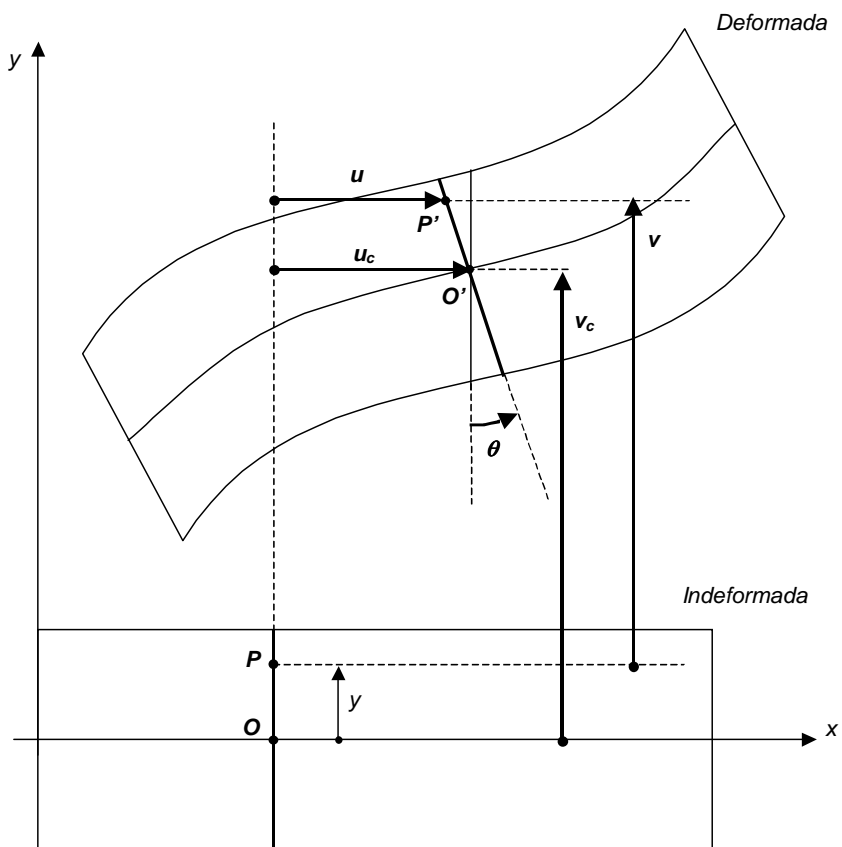


Figura 3. Desplazamientos de un punto material de una viga.

Por lo tanto es posible aproximar a los desplazamientos u , v y al giro θ en función de los desplazamientos u_c , v_c del eje centrodial como:

$$u = u_c - y \frac{dv_c}{dx} \quad (37)$$

$$v = v_c$$

$$\theta = \frac{dv_c}{dx}$$

Para vigas esbeltas asumiendo un estado plano de tensiones y despreciando las deformaciones por corte la única componente relevante del tensor de deformación es la componente E_{xx} . Luego, asumiendo que los desplazamientos de imperfección sean pequeños, la energía de deformación se puede expresar respecto de la configuración de referencia (ec. 25) como:

$$U \approx \frac{1}{2} \int_{V_R} E (E_{xx})^2 dV_R \quad (38)$$

De la ecuación (34) tenemos que, para deformaciones pequeñas, el tensor de deformación E_{xx} es:

$$E_{xx} = \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \omega_{yx} \omega_{yx} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \bar{\omega}_{mj} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{mi} \omega_{mj} = \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} (\omega_{xy})^2 + \omega_{xy} \bar{\omega}_{xy} \quad (39)$$

Donde

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (40)$$

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\bar{\omega}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)$$

Usando las relaciones (37) es posible expresar estas derivadas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du_c}{dx} - y \frac{d^2 v_c}{dx^2} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{d\bar{v}_c}{dx} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dv_c}{dx} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= \frac{d\bar{v}_c}{dx} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{dv_c}{dx} \end{aligned} \quad (41)$$

Luego el tensor de deformación E_{xx} resulta

$$E_{xx} = \frac{du_c}{dx} - y \frac{d^2 v_c}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^2 + \frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} \quad (42)$$

Sustituyendo en la energía de formación resulta

$$U = \frac{E}{2} \int_L \int_A \left(\begin{aligned} &\left(\frac{du_c}{dx} \right)^2 + y^2 \left(\frac{d^2v_c}{dx^2} \right)^2 - 2y \frac{du_c}{dx} \frac{d^2v_c}{dx^2} + \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^4 + \left(\frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} \right)^2 + \\ &+ \frac{du_c}{dx} \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2v_c}{dx^2} \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^2 + \\ &+ 2 \frac{du_c}{dx} \frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} - 2y \frac{d^2v_c}{dx^2} \frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} + \\ &+ \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^3 \frac{d\bar{v}_c}{dx} \end{aligned} \right) dA dx \quad (43)$$

Donde A es el área de la sección transversal y L es la longitud de la viga en la configuración de referencia.

Asumiendo a los ejes x , y como ejes principales de inercia de la sección, tienen las siguientes propiedades:

$$\int_A y dA = 0 \quad (44)$$

$$\int_A y^2 dA = I$$

Donde I es el momento de inercia de la sección.

Luego integrando sobre la sección de la viga obtenemos

$$U = \frac{E}{2} \int_L \left(\begin{aligned} &A \left(\frac{du_c}{dx} \right)^2 + I \left(\frac{d^2v_c}{dx^2} \right)^2 + \frac{A}{4} \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^4 + A \frac{du_c}{dx} \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^2 + \\ &+ 2A \frac{du_c}{dx} \frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} + A \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^3 \frac{d\bar{v}_c}{dx} + A \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^2 \left(\frac{d\bar{v}_c}{dx} \right)^2 \end{aligned} \right) dx \quad (45)$$

Luego si consideramos que los desplazamientos de imperfección son muy pequeños podemos despreciar el último término en la expresión de la energía de deformación que contiene términos cuadráticos en las imperfecciones, quedando finalmente la energía de deformación como:

$$U = \frac{E}{2} \int_L \left(\begin{aligned} &A \left(\frac{du_c}{dx} \right)^2 + I \left(\frac{d^2v_c}{dx^2} \right)^2 + \frac{A}{4} \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^4 + A \frac{du_c}{dx} \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^2 + \\ &+ 2A \frac{du_c}{dx} \frac{dv_c}{dx} \frac{d\bar{v}_c}{dx} + A \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^3 \frac{d\bar{v}_c}{dx} \end{aligned} \right) dx \quad (46)$$

La imposición de rotaciones moderadas con la que se dedujo esta expresión de la energía de deformación se corresponde con la llamada⁷ teoría de láminas y vigas abatidas o rebajadas (*shallow shells*) que permite expresar todas las variables respecto de un plano muy cercano a la geometría curva del elemento estructural.

3. MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGAS IMPERFECTAS

Existen en la literatura diversos elementos finitos para el análisis de vigas curvas^{8,9,10,11} siendo algunos⁸ desarrollados especialmente para vigas abatidas. Estos elementos que originalmente fueron desarrollados para analizar vigas curvas y arcos podrían emplearse para analizar vigas imperfectas. Sin embargo, presentan diferentes tipos de complejidades, como funciones de forma no convencionales o requieren integración numérica.

Luego el objetivo es desarrollar un elemento finito para vigas curvas pero con una formulación simplificada que sea apto para el análisis de vigas originalmente rectas que presentan imperfecciones geométricas de pequeña magnitud. Para ello nos basaremos en la expresión de la energía de deformación para rotaciones moderadas deducida previamente.

Consideremos un elemento finito de viga bidimensional con sus tres configuraciones, la configuración de referencia (“ficticia”), la configuración inicial (“imperfecta”) y la configuración deformada (“equilibrada”) (Fig. 4).

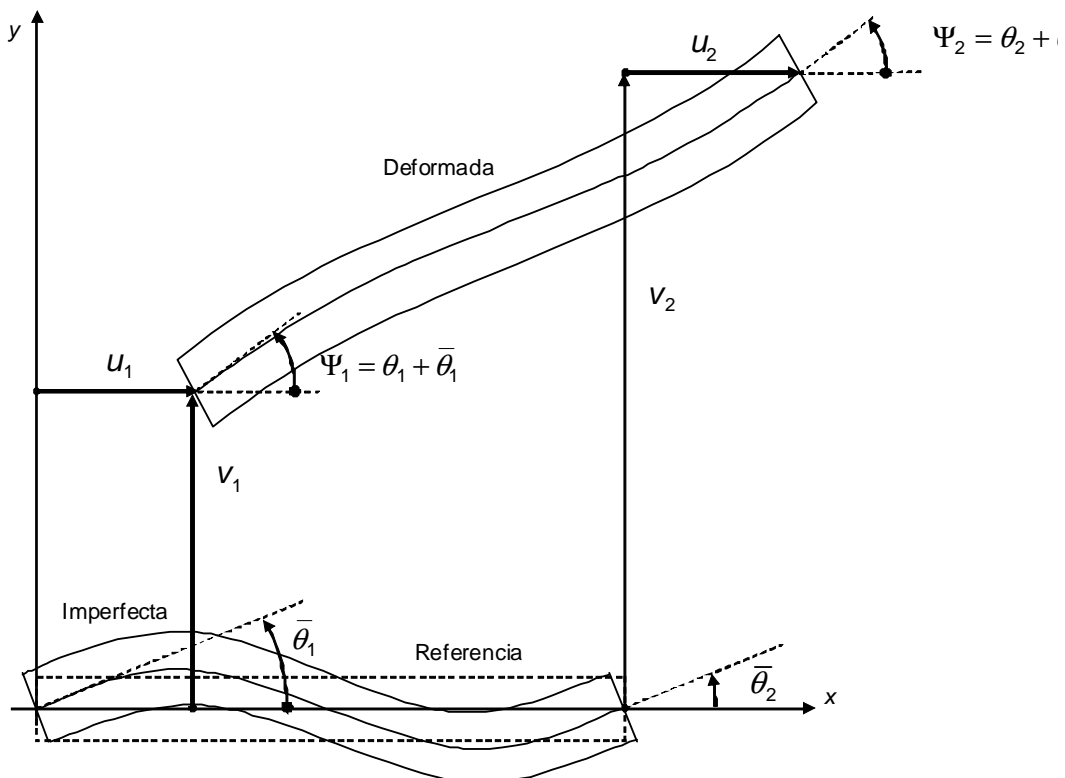


Figura 4. Elemento finito de viga imperfecta.

Hemos supuesto que la configuración de referencia se encuentra representada por una viga recta entre los extremos de la configuración imperfecta inicial. A su vez asumimos que la configuración imperfecta se obtiene mediante giros nodales de imperfección $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ usando las clásicas funciones de forma cúbicas para vigas^{12,13,14} y se consideran sólo imperfecciones en la dirección transversal a la configuración de referencia, resultando

$$\begin{aligned}\bar{u}_c(x) &= 0 \\ \bar{v}_c(x) &= N_{\theta_1} \bar{\theta}_1 + N_{\theta_2} \bar{\theta}_2\end{aligned}\quad (47)$$

Donde N_{θ_i} son las funciones de forma para rotaciones

$$\begin{aligned}N_{\theta_1} &= (\eta - 2\eta^2 + \eta^3)L \\ N_{\theta_2} &= (\eta^3 - \eta^2)L\end{aligned}\quad (48)$$

Siendo $\eta = x/L$, donde L es la longitud de la viga en la configuración inicial.

Luego asumiendo rotaciones moderadas es posible expresar los desplazamientos $u_c(x)$, $v_c(x)$ de la configuración deformada respecto de la inicial por las usuales funciones de forma cúbica en función de los desplazamientos nodales $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$, relativos a la configuración inicial como:

$$\begin{aligned}u_c(x) &= N_{u_1} u_1 + N_{u_2} u_2 \\ v_c(x) &= N_{v_1} v_1 + N_{\theta_1} \theta_1 + N_{v_2} v_2 + N_{\theta_2} \theta_2\end{aligned}\quad (49)$$

Siendo las funciones de forma N_{u_i}, N_{v_i}

$$\begin{aligned}N_{u_1} &= 1 - \eta & N_{u_2} &= \eta \\ N_{v_1} &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 & N_{v_2} &= 3\eta^2 - 2\eta^3\end{aligned}\quad (50)$$

Observemos que las rotaciones nodales θ_1, θ_2 , se miden desde la configuración inicial.

3.1 Cálculo de la matriz de rigidez para una viga imperfecta

Los coeficientes k_{ij} de la matriz de rigidez tangente \mathbf{K} de un elemento finito con desplazamientos nodales d_i se obtienen derivando dos veces la energía de deformación respecto de los desplazamientos nodales¹⁵ como:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial d_i \partial d_j}\quad (51)$$

Notemos que para sistemas conservativos la matriz de rigidez tangente es siempre simétrica.

Ordenando los desplazamientos nodales de deformación en un vector \mathbf{d} como:

$$\mathbf{d} = \{d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6\}^t = \{u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2\}^t \quad (52)$$

Sustituyendo los desplazamientos $u_c(x)$, $v_c(x)$ de las ecuaciones (49) y los desplazamientos de imperfección de las ecuaciones (47) en la expresión (46) de la energía de deformación esta queda expresada en términos de los desplazamientos nodales.

Debemos resaltar que para el cálculo de esta integral hemos utilizado software de algebra simbólica (Matlab) lo mismo para el cálculo de los coeficientes de la matriz de rigidez tangente \mathbf{K} de la viga imperfecta que se puede expresar como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_L^{imp} + \mathbf{K}_{NL}^{imp} \quad (53)$$

Donde \mathbf{K}_L representa la parte lineal o constante de la matriz de rigidez que coincide con la matriz de rigidez de un elemento recto y considerando pequeños desplazamientos, \mathbf{K}_{NL} representa la parte no lineal o dependiente de los desplazamientos nodales, \mathbf{K}_L^{imp} representa la parte lineal del aporte de las imperfecciones y \mathbf{K}_{NL}^{imp} representa la parte no lineal del aporte de imperfecciones.

La matriz \mathbf{K}_L es la clásica matriz de rigidez para vigas^{12,13}, que se expresa como:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} c1 & 0 & 0 & -c1 & 0 & 0 \\ & c5 & c4 & 0 & -c5 & c4 \\ & & c3 & 0 & -c4 & c2 \\ & & & c1 & 0 & 0 \\ & & & & c5 & -c4 \\ & & & & & c3 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Donde los coeficientes $c1$ a $c5$ valen

$$c1 = \frac{EA}{L} \quad c2 = 2 \frac{EI}{L} \quad c3 = 4 \frac{EI}{L} \quad c4 = 6 \frac{EI}{L^2} \quad c5 = 12 \frac{EI}{L^3} \quad (55)$$

La matriz \mathbf{K}_{NL} se puede expresar como

$$\mathbf{K}_{NL} = \begin{bmatrix} 0 & c12 & c11 & 0 & -c12 & c10 \\ & c9 & c8 & -c12 & -c9 & c14 \\ & & c7 & -c11 & -c8 & c6 \\ & & & 0 & c12 & -c10 \\ & & & & c9 & -c14 \\ & & & & & c13 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Donde los coeficientes $c6$ a $c13$ valen

$$\begin{aligned}
 c6 &= \frac{EA}{30}(u_1 - u_2) + \frac{3EAL}{140}(v_1 - v_2)(\theta_1 + \theta_2) - \frac{EAL^2}{280}(3\theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2 + 3\theta_2^2) \\
 c7 &= -\frac{2EA}{15}(u_1 - u_2) + \frac{9EA}{70L}(v_1 - v_2)^2 + \frac{3EA}{140}(v_1 - v_2)(\theta_2 - \theta_1) \\
 &\quad + \frac{EAL}{140}(12\theta_1^2 - 3\theta_1\theta_2 + \theta_2^2) \\
 c8 &= -\frac{EA}{10L}(u_1 - u_2) + \frac{27EA}{70L^2}(v_1 - v_2)^2 + \frac{9EA}{35L}(v_1 - v_2)\theta_1 \\
 &\quad + \frac{3EA}{280}(\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 - \theta_1^2) \\
 c9 &= \frac{6EA}{5L^2}(u_2 - u_1) + \frac{108EA}{35L^3}(v_1 - v_2)^2 + \frac{27EA}{35L^2}(v_1 - v_2)(\theta_1 + \theta_2) \\
 &\quad + \frac{9EA}{70L}(\theta_2^2 + \theta_1^2) \\
 c10 &= \frac{EA}{10L}(v_2 - v_1) + \frac{EA}{30}(\theta_1 - 4\theta_2) \\
 c11 &= \frac{EA}{10L}(v_2 - v_1) + \frac{EA}{30}(\theta_2 - 4\theta_1) \\
 c12 &= \frac{6EA}{5L^2}(v_2 - v_1) - \frac{EA}{10L}(\theta_1 + \theta_2) \\
 c13 &= \frac{2EA}{15}(u_2 - u_1) + \frac{9EA}{70L}(v_1 - v_2)^2 - \frac{3EA}{140}(v_1 - v_2)(\theta_2 - \theta_1) \\
 &\quad + \frac{EAL}{140}(12\theta_2^2 - 3\theta_1\theta_2 + \theta_1^2) \\
 c14 &= \frac{EA}{10L}(u_2 - u_1) + \frac{27EA}{70L^2}(v_1 - v_2)^2 + \frac{9EA}{35L}(v_1 - v_2)\theta_2 \\
 &\quad + \frac{3EA}{280}(\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 - \theta_2^2)
 \end{aligned} \tag{57}$$

La matriz de imperfecciones lineales K_L^{imp} se puede expresar como

$$K_L^{imp} = \begin{bmatrix} 0 & -c15 & c16 & 0 & c15 & c17 \\ & 0 & 0 & c15 & 0 & 0 \\ & & 0 & -c16 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -c15 & -c17 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{58}$$

Donde los coeficientes $c15$ a $c17$ dependen de los desplazamientos de imperfección y valen

$$c15 = \frac{EA}{10L}(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \quad c16 = \frac{EA}{30}(\bar{\theta}_2 - 4\bar{\theta}_1) \quad c17 = \frac{EA}{30}(\bar{\theta}_1 - 4\bar{\theta}_2) \quad (59)$$

La matriz de imperfecciones no lineales K_{NL}^{imp} se puede expresar como

$$K_{NL}^{imp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c18 & c19 & 0 & c20 & c21 & \\ & c22 & 0 & -c19 & c23 & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & -c20 & -c21 & \\ & & & & & c24 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Donde los coeficientes $c18$ a $c24$ dependen de los desplazamientos de imperfección y de los desplazamientos nodales y valen

$$\begin{aligned} c18 &= \frac{9EA}{35L}(\bar{\theta}_1\theta_1 + \bar{\theta}_2\theta_2) + \frac{27EA}{35L^2}(v_1 - v_2)(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \\ c19 &= \frac{3EA}{140}[(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)\theta_1 + (\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1)\theta_2] + \frac{9EA}{35L}(v_1 - v_2)\bar{\theta}_1 \\ c20 &= \frac{27EA}{35L^2}(v_2 - v_1)(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1) - \frac{9EA}{35L}(\theta_1\bar{\theta}_1 + \theta_2\bar{\theta}_2) \\ c21 &= \frac{3EA}{140}[(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2)\theta_1 + (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)\theta_2] + \frac{9EA}{35L}(v_1 - v_2)\bar{\theta}_2 \\ c22 &= \frac{EAL}{140}[(24\bar{\theta}_1 - 3\bar{\theta}_2)\theta_1 + (2\bar{\theta}_2 - 3\bar{\theta}_1)\theta_2] + \frac{3EA}{140}(v_2 - v_1)(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \\ c23 &= \frac{EAL}{140}[(2\bar{\theta}_2 - 3\bar{\theta}_1)\theta_1 + (2\bar{\theta}_1 - 3\bar{\theta}_2)\theta_2] + \frac{3EA}{140}(v_1 - v_2)(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1) \\ c24 &= \frac{EAL}{140}[(2\bar{\theta}_1 - 3\bar{\theta}_2)\theta_1 + (24\bar{\theta}_2 - 3\bar{\theta}_1)\theta_2] + \frac{3EA}{140}(v_1 - v_2)(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \end{aligned} \quad (61)$$

3.2 Matriz de rigidez para estructuras imperfectas

Consideremos una estructura metálica de barras rectas modelada con elementos finitos y supongamos que conocemos la distribución de imperfecciones (Fig. 5a). Siguiendo las normas^{4,5} podemos efectuar un modelado directo de dichas imperfecciones y calcular la estructura imperfecta mediante un análisis no lineal bajo cargas mayoradas.

En general, la imperfección corresponde a una deformada de la estructura perfecta, usualmente asociada al primer modo de pandeo¹⁷. Luego esta imperfección se puede modelar directamente desplazando los nodos de la estructura perfecta

utilizados para generar la deformada (Fig. 5b).

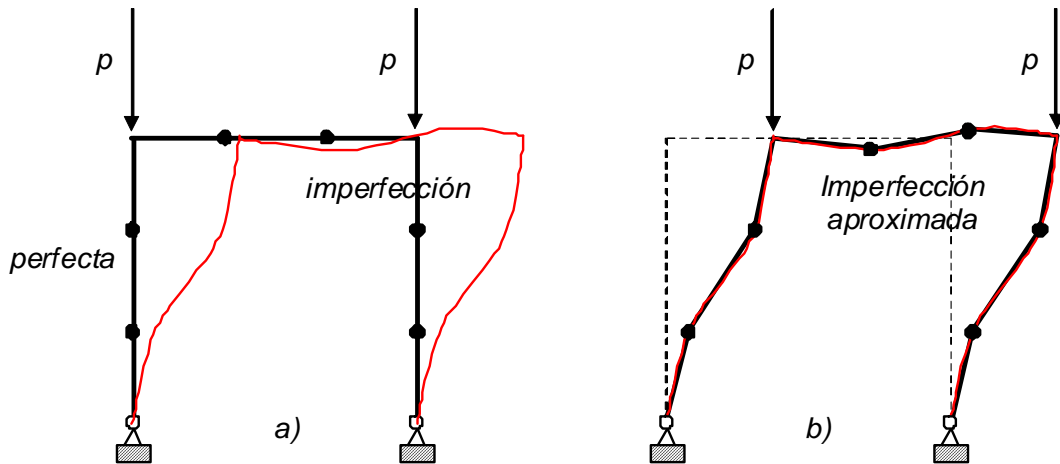


Figura 5. Modelado directo de imperfecciones.

Sin embargo, la estructura imperfecta es curva y es conveniente representar su geometría de forma detallada mediante elementos finitos imperfectos a partir de los desplazamientos nodales de imperfección $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\varphi}$.

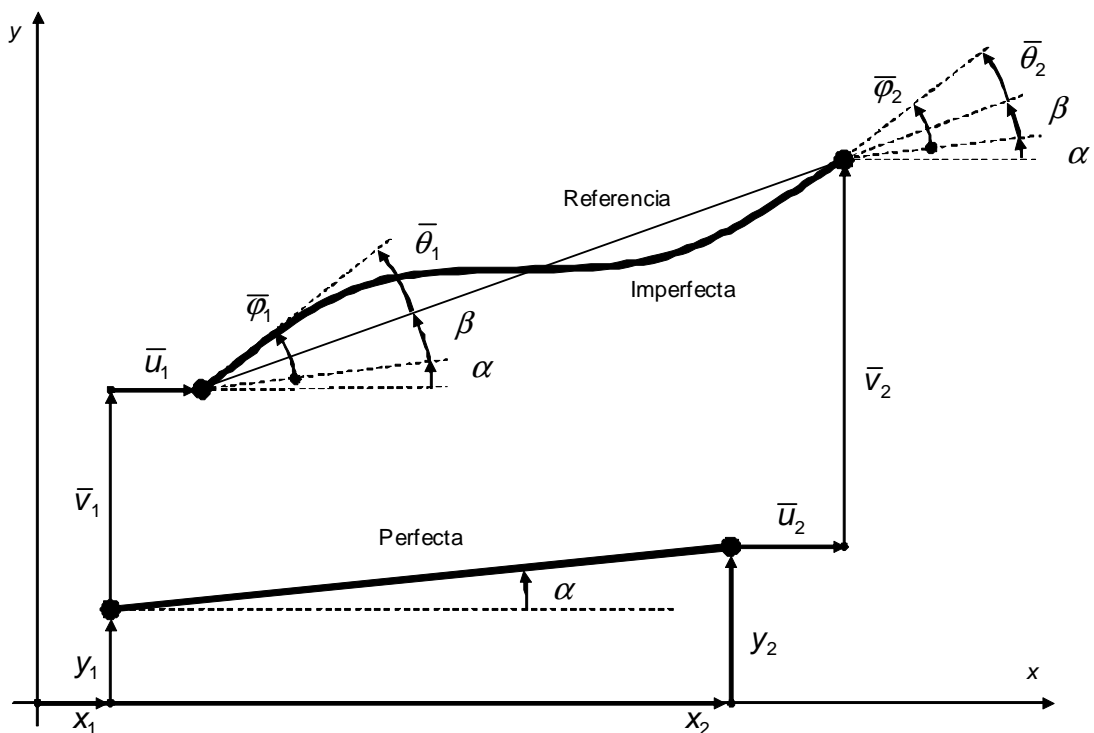


Figura 6. Elemento finito imperfecto.

Luego asumiendo que las rotaciones de imperfección $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ son muy pequeñas pueden aproximarse como:

$$\bar{\theta}_1 \approx \tan \bar{\theta}_1 = \tan(\bar{\varphi}_1 - \beta) = \frac{\tan \bar{\varphi}_1 - \tan \beta}{1 + \tan \bar{\varphi}_1 \tan \beta} \quad (62)$$

$$\bar{\theta}_2 \approx \tan \bar{\theta}_2 = \tan(\bar{\varphi}_2 - \beta) = \frac{\tan \bar{\varphi}_2 - \tan \beta}{1 + \tan \bar{\varphi}_2 \tan \beta}$$

Siendo

$$\tan \beta = \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \cos \alpha - (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \operatorname{sen} \alpha}{L_0 + (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \cos \alpha + (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \operatorname{sen} \alpha} \quad (63)$$

con

$$L_0 = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \quad \cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{L_0} \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{L_0} \quad (64)$$

8. CONCLUSIONES

La formulación aquí propuesta puede representar más adecuadamente el comportamiento de estructuras imperfectas que utilizando la formulación convencional que aproxima la geometría con segmentos rectos.

Si bien la formulación presentada está orientada a vigas cuya geometría inicial curva proviene de imperfecciones se puede aplicar¹⁶ a vigas con forma de arco u otras geometrías curvas.

Se debe resaltar que si bien se analizan vigas de eje curvo, como son las vigas imperfectas, no se ha utilizado ninguna teoría particular para elementos curvos, simplemente se ha establecido que la curvatura inicial proviene de deformar un elemento inicialmente recto utilizando las mismas funciones de forma que para los desplazamientos. Esto es lo que usualmente se conoce como formulación *isoparamétrica*¹³, sin embargo a diferencia de esta formulación se han simplificado las integrales para efectuarlas sobre las configuraciones de referencia sin necesidad de utilizar integración numérica¹⁴.

Se ha limitado la aplicación a rotaciones moderadas, una hipótesis usual para las estructuras civiles, sin embargo es posible extender la formulación para considerar grandes rotaciones, como en el caso de mecanismos, donde si bien hay grandes rotaciones de cuerpo rígido las deformaciones se mantienen pequeñas. Para ello se puede considerar una formulación corrotacional¹⁸ basada en las mismas hipótesis aquí adoptadas.

9. REFERENCIAS

1. Galambos T.V., (1998), Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, John Wiley, New York.

2. Thompson J.M.T. y Hunt G.W., (1973), *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, London.
3. Thompson J.M.T. y Hunt G.W., (1984), *Elastic Instability Phenomena*, John Wiley, London.
4. ANSI/AISC 360-10, Specification for structural steel buildings, American Institute of Steel Construction, Chicago, USA, 2010.
5. EUROCODE 3, Design of Steel Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, European Committee for Standardization (CEN), Brussels, (2009).
6. Fung Y.C., (1965), *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
7. Ventsel, E. y Krauthammer, T., (2001), *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*, Marcel Dekker, New York.
8. Elias Z.M. y Chen K.-L., *Nonlinear shallow curved-beam finite element*, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, 114(6), 1076-1087, (1988).
9. Calhoun, P.R. y DaDeppo, D.A., *Nonlinear finite element analysis of clamped arches*, ASCE Journal of Structural Engineering Division, 109(3), 559-612,(1983).
10. Fujii, F. y Gong, S., *Field transfer matrix for nonlinear curved beams*, ASCE Journal of Structural Engineering Division, 114(3), 675-691,(1988).
11. Pi, Y.-L y Trahair, N.S., *Three-dimensional analysis of nonlinear elastic arches*, Engineering Structures, 18(1), 49-63, (1996).
12. Cook R.D, Malkus D.S. y Plesha M.E., (1989), *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons, New York.
13. Hughes T.J.R., (1987), *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs.
14. Zienkiewicz O.C. y Taylor R.L., (1989), *The Finite Element Method – Vol.1 Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill Book Co.
15. Jouglaard C.E., (1993), *Análisis no lineal incremental asintótico de la estabilidad de estructuras elásticas*, Tesis de Maestría en Ingeniería Civil, COPPE-UFRJ, Río de Janeiro, Brasil.
16. Jouglaard C.E. y Perez A.L., (2008), *Matriz de rigidez de vigas imperfectas*, XXI Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, Buenos Aires, 15-17 de Octubre de 2008.
17. Martinez D., (2014), *Implementación del Método de Análisis Directo según AISC para el análisis de la estabilidad y el diseño de estructuras metálicas esbeltas apertadas*, Tesis de Maestría en Ingeniería Estructural, UTN-FRA, Avellaneda, Argentina.
18. De Borst R., Crisfield M., Remmers J. y Verhoosel C., (2012), *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley and Sons Ltd.