

ANÁLISIS EN FLEXIÓN COMPUESTA RECTA DE SECCIONES RECTANGULARES CON ARMADURAS ASIMÉTRICAS SEGÚN EL NUEVO CIRSOC 201

Ingeniero Civil Victorio Hernández Balat
Quasdam Ingeniería – Departamento de Construcciones de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Plata

Resumen:

El hecho de que el nuevo CIRSOC 201 permita el uso de un bloque equivalente de tensiones rectangular y la adopción de un único punto de pivote para los planos de deformaciones conduce a un planteo sumamente compacto de dimensionamiento a través de la aplicación del Teorema de Ehlers y de sencillas ecuaciones de equilibrio de momentos y fuerzas. En el trabajo se presentan expresiones “exactas” de dimensionamiento directo de armaduras asimétricas para secciones rectangulares sometidas a flexión compuesta recta. Se analizan casos de tracción y compresión compuesta y se indica el campo de validez de las mismas. Se realizan consideraciones respecto a la economía de los resultados obtenidos al compararlos con soluciones con armaduras simétricas.

Abstract:

Last version of CIRSOC 201 allows the use of a rectangular block of stresses in concrete and a single point of rotation for the limit planes of strains. Based on these two facts, and by means of Ehlers' Theorem and very simple equilibrium equations, “exact” and very compact expressions are derived in this paper for the design of non symmetric reinforcement in rectangular sections under flexure and axial load. Both compression and tension are analyzed and the range of validity of expressions is set. Comparisons in terms of economy are made between symmetric and non symmetric arrangements.

Introducción

El uso del diagrama parábola rectángulo indicado en el CIRSOC 201-82 para la representación del comportamiento del hormigón en compresión hizo perder la posibilidad de resolver muchos casos de flexión simple y compuesta sin recurrir al uso de ábacos o programas de computación. El objeto de este trabajo es recuperar algunos conceptos y razonamiento que en el pasado fueron muy utilizados en el análisis de secciones sometidas a flexión compuesta recta adaptándolos al marco dado por el nuevo CIRSOC 201 en el que se acepta el uso de un bloque rectangular representativo de la respuesta del hormigón en compresión.

Armadura Asimétrica versus Armaduras Simétricas

Las secciones rectangulares se arman muy frecuentemente en forma simétrica argumentando:

- a) Razones económicas:
 - a.1) Cuando las excentricidades en compresión o tracción son pequeñas un cálculo con armaduras asimétricas conducirá a armaduras “ A_s ” y “ A'_s ” muy parecidas
 - a.2) Cuando pueden presentarse momentos solicitantes que cambien de signo y tengan aproximadamente el mismo valor absoluto
- b) Razones constructivas:
 - b.1) Cuando no dándose ninguno de las situaciones anteriores se quiera simplificar la construcción o se sospeche que, de utilizarse armaduras asimétricas, en obra, por error, podrían ser colocadas invertidas
 - b.2) Cuando las solicitaciones a lo largo de la pieza varían de tal forma que no tiene sentido optimizar la distribución de armaduras sección a sección pues el esquema de armado resultaría impracticable.

En el caso del pórtico de la Figura 1 seguramente el dintel presentará una solución más económica utilizando armaduras asimétricas (mayores armaduras en la cara superior en los extremos y en la cara inferior en el centro del tramo). Los montantes, por la alternancia de momentos que puede llegar a originar la acción del viento sobre los laterales de la construcción, es muy posible que requieran un estudio detallado para decidir entre armaduras simétricas y asimétricas.

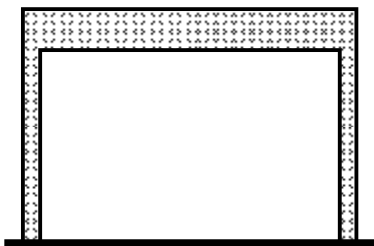


Figura 1

Flexión Generalizada (Teorema de Ehlers)

El procedimiento de cálculo, también conocido como “Flexión Generalizada”, consiste en:

- a) Llevar el nivel de reducción de momentos a la armadura traccionada “ A_s ” (ver nomenclatura en Figura 2).
En general, las solicitaciones normales a ser resistidas por una sección se definen a través de un momento flector “ M_n ” y un esfuerzo axial “ P_n ” supuesto actuando a nivel del centro de gravedad de dicha sección. El par de solicitaciones anterior es equivalente a una fuerza “ P_n ” aplicada a nivel de “ A_s ” más un momento dado por la expresión: $M_{nR} = P_n (M_n/P_n + h/2 - d')$
- b) Calcular con el nuevo momento “ M_{nR} ” una armadura traccionada “ A_{sR} ”, y eventualmente una armadura comprimida “ A'_s ”, como si se tratara de un caso de flexión simple
- c) Corregir el valor de “ A_{sR} ” así obtenido suponiendo que la fuerza exterior es enteramente resistida por dicha armadura. En otras palabras, si la fuerza es de compresión la armadura calculada en el punto anterior se disminuye en el valor “ P_n/f_y ”. En caso contrario, la armadura se aumenta en dicho valor.
- d) La armadura comprimida que se obtenga del cálculo no requiere corrección alguna.

Si se respeta el rango de aplicación que se establece más adelante, el procedimiento anterior es “exacto”.

El esquema anterior suele mencionarse en la bibliografía como Teorema de Ehlers.

Flexión Compuesta con Compresión y con Tracción con Grandes Excentricidades

El procedimiento que se detalla a continuación tiene validez siempre que se trate de solicitaciones de flexocompresión o flexotracción con gran excentricidad en las que la deformación de la armadura más traccionada no sea inferior a 0.005. Esto se verifica cuando (ver nomenclatura en Figura 2 y en el Apéndice):

- a) En flexocompresión, luego de realizar los cálculos se arriba a un valor de A_s positivo, en general esto se produce siempre que la carga “ P_n ” se encuentre “por encima” de A'_s , es decir, cuando $e \geq (h/2 - d'_s)$
- b) En flexotracción la carga se encuentre “por debajo” de A_s , es decir, cuando $e \leq -(h/2 - d'_s)$

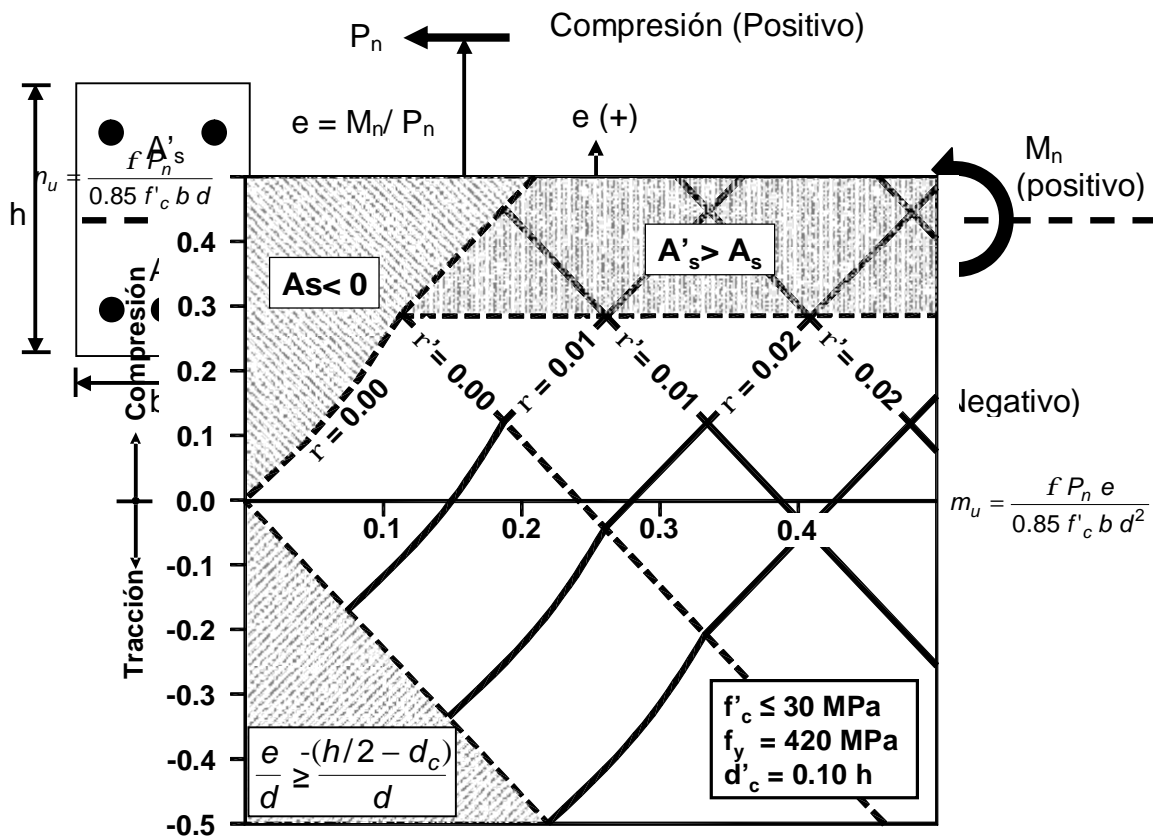


Figura 3

Entrando en detalle, y considerando las particularidades del CIRSOC 201, el procedimiento consiste en:

- Suponer que se trata de una rotura controlada por tracción es decir:

$$\phi = 0.90$$

$$P_n = P_u / \phi$$

$$M_n = M_u / \phi$$
- Cálculo del momento de P_n respecto a A_s :

$$M_{nR} = P_n (M_n / P_n + h/2 - d')$$
- Cálculo de A_{sR} y A'_{sR} en Flexión Simple para M_{nR}
- Corregir A_{sR} por efecto de P_n :

$$A_s = A_{sR} - P_n / f_y$$

$$A'_s = A'_{sR}$$

En definitiva, lo que se ha hecho es aplicar el esfuerzo axial directamente sobre la armadura mediante la corrección del momento solicitante. De esta forma se ha dimensionado a flexión simple para el momento solicitante corregido y luego se ha introducido la fuerza exterior como un incremento o decremento de la armadura calculada previamente a flexión simple.

En la Figura 3 los rayados diagonales indican las zonas en las que no es aplicable el procedimiento anterior.

Flexotracción con Pequeñas Excentricidades [$e \geq - (h/2 - d'_s)$]

El procedimiento del punto anterior puede ser complementado de modo de poder cubrir el rango correspondiente a las pequeñas excentricidades en tracción (triángulo rayado en el ángulo inferior izquierdo de la Figura 3). En este caso, la fuerza exterior está ubicada entre las armaduras. La sección se encuentra enteramente traccionada por lo que no hay resultante de compresiones en el hormigón y el planteo de momentos respecto a A_s conduce a:

$$\begin{aligned} \text{del equilibrio de fuerzas se obtiene: } & A'_s = - P_n (M_n/P_n + h/2 - d'_s) / [(h - 2d'_s) f_y] \\ & A_s = - P_n / f_y - A'_s \end{aligned}$$

Flexocompresión con Excentricidades Medias y Pequeñas

Cuando no se presentan situaciones como las vistas en los puntos anteriores se está en presencia de solicitaciones de compresión con excentricidades medias y pequeñas. No existen expresiones sencillas para analizar estas situaciones y, por otra parte, tampoco resulta recomendable en estos casos recurrir al uso de armaduras asimétricas.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

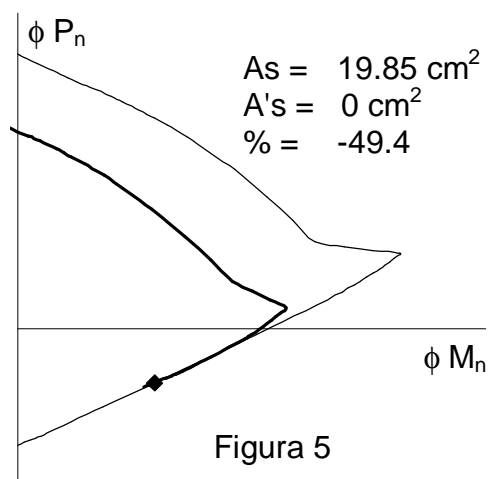
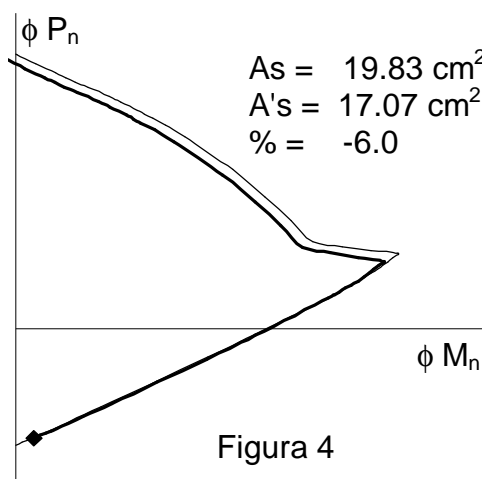
En cada una de las figuras siguientes se han representado diagramas de interacción correspondientes a la siguiente sección rectangular:

- Materiales:
- Hormigón: $f'_c = 30 \text{ MPa}$
 - Acero: $f_y = 420 \text{ MPa}$
- Sección Transversal:
- $b_w = 0.25 \text{ m}$; $h = 0.60 \text{ m}$; Rec. eje armad. = 0.05 m

En todas las figuras se ha representado en trazo fino el diagrama de interacción correspondiente a la siguiente armadura simétrica:

$$- A_s = A'_s = 19.64 \text{ cm}^2$$

Asimismo se han graficado en trazo grueso diferentes diagramas de interacción correspondientes a armaduras asimétricas que satisfacen la condición de resistencia para un punto del diagrama de interacción correspondiente a armaduras simétricas. Dicho punto está representado en cada caso mediante un rombo. Para cada caso se han indicado las armaduras asimétricas calculadas y el porcentaje de ahorro respecto a la armadura simétrica. En algunas situaciones la conveniencia de una armadura asimétrica puede verse disminuida por la necesidad de respetar las cuantías mínimas.



En los ejemplos del punto siguiente se muestra el cálculo de las armaduras correspondientes a las solicitaciones indicadas en las Figuras 4 a 6.

En las Figuras 8, 9 y 10 se muestran solicitaciones para las que las armaduras simétricas presentan deformaciones menores a 0.005 en la armadura más traccionada por lo que corresponde utilizar coeficientes de reducción de resistencia menores que 0.90. Para esos mismos casos las armaduras asimétricas todavía pueden obtenerse para $\phi = 0.90$ lo que las hace económicamente más interesantes. No se trata de una situación "real" de resistencia sino de cuestiones relacionadas con la ductilidad de la rotura. Como puede observarse, en esos casos las armaduras asimétricas requieren siempre la existencia de armaduras de compresión y dichas armaduras se calculan bajo la hipótesis de una deformación de 0.005 en las armaduras más traccionadas lo que conduce a un valor constante de 0.90 para ϕ .

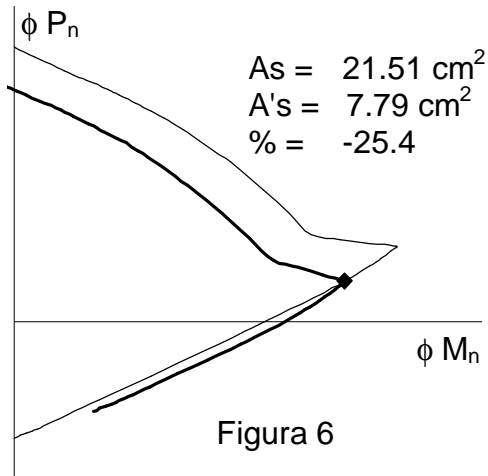


Figura 6

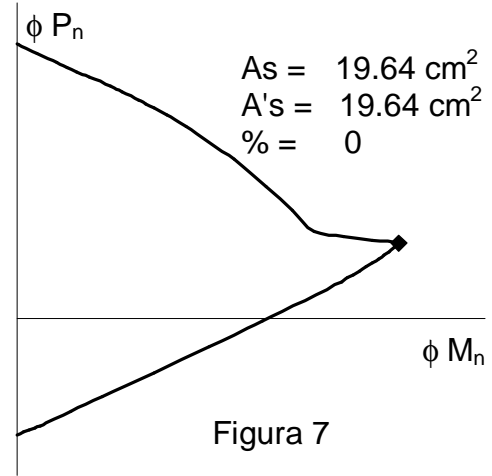


Figura 7

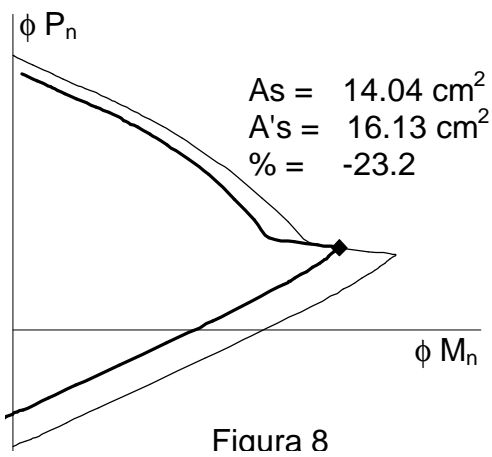


Figura 8

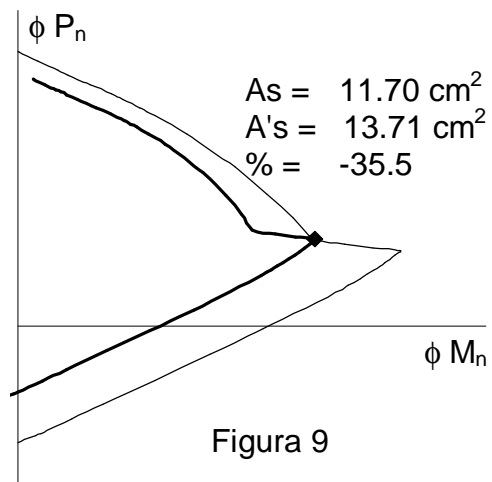


Figura 9

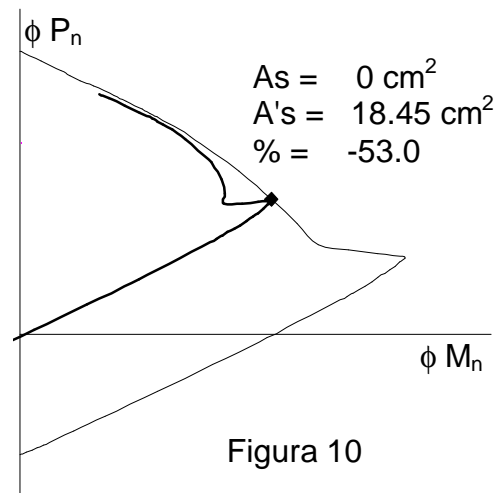


Figura 10

En estos casos se da la situación de tener armaduras comprimidas más grandes que las traccionadas (zona con rayado vertical en Figura 3).

EJEMPLOS

Los ejemplos están referidos a la misma sección que se utilizó para el desarrollo de las Figuras 4 a 10. Las expresiones y criterios utilizados para el dimensionamiento en flexión simple se encuentran detalladas en el Apéndice.

Datos Generales

Materiales: - Hormigón: $f'_c = 30$ MPa; Acero: $f_y = 420$ MPa
Sección Transversal: - $b_w = 0.25$ m; $h = 0.60$ m; $d' = 0.05$ m
 $d = h - d_c = 0.55$ m; $e_{\text{límite}} = h/2 - d'_s = 0.25$ m

Para $f'_c = 30$ MPa se tiene que: - $f^*_c = 0.85 f'_c = 25.50$ MPa = 25500 kN/m²
- $\beta_1 = 0.85$
- $k_{a\text{mín}} = 1.4 / f^*_c$ (MPa) = 0.055
- $k_{a\text{máx}} = 0.375 * 0.85 = 0.31875$

Ejemplo 1 (Figura 4): $P_u = -1394.89$ kN; $M_u = 26.16$ kNm

$$e = M_u / P_u = -0.019 \text{ m} \gg -e_{\text{límite}} = -0.25 \text{ m}$$

$$P_n = P_u / \phi = P_u / 0.90 = -1549.88 \text{ kN}$$

$$M_n = M_u / \phi = M_u / 0.90 = 29.07 \text{ kNm}$$

$$A'_s = -P_n (M_n/P_n + h/2 - d'_s) / [(h - 2d'_s) f_y] = 17.07 \text{ cm}^2$$

$$A_s = -P_n / f_y - A'_s = 19.83 \text{ cm}^2$$

Ejemplo 2 (Figura 5): $P_u = -694.29$ kN; $M_u = 204.20$ kNm

$$e = M_u / P_u = -0.294 \text{ m} < -e_{\text{límite}} = -0.25 \text{ m}$$

$$P_n = P_u / \phi = P_u / 0.90 = -771.43 \text{ kN}$$

$$M_n = M_u / \phi = M_u / 0.90 = 226.89 \text{ kNm}$$

$$M_{nR} = P_n (M_n/P_n + h/2 - d'_s) = -771.43 (-226.89/771.43 + 0.60/2 - 0.05) = 34.03 \text{ kNm}$$

$$m_{nR} = M_{nR} / (f^*_c b_w d^2) = 34.03 / (25500 \times 0.25 \times 0.55^2) = 0.01765$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \times 0.01765)^{1/2} = 0.01780 < k_{a\text{mín}}$$

A pesar de que habría que adoptar cuantía mínima de flexión se sigue adelante con los cálculos de modo de obtener la armadura estrictamente necesaria.

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0.022 / 0.85 = 0.026 < 0.375 \Rightarrow A'_s = 0$$

$$A_{sR} = k_a f^*_c b_w d / f_y = 0.01780 \times 25.50 \times 25 \times 55 / 420 = 1.48 \text{ cm}^2$$

$$A_s = A_{sR} - P_n / f_y = 1.48 - (-771.43) \times 10 / 420 = 19.85 \text{ cm}^2$$

$$A'_s = A'_{sR} = 0$$

Ejemplo 3 (Figura 6): $P_u = 466.37 \text{ kN};$ $M_u = 485.25 \text{ kNm}$

$$e = M_u / P_u = 1.04 \text{ m} > e_{\text{límite}} = 0.25 \text{ m}$$

$$P_n = P_u / \phi = P_u / 0.90 = 518.19 \text{ kN}$$

$$M_n = M_u / \phi = M_u / 0.90 = 539.17 \text{ kNm}$$

$$M_{nR} = P_n (M_n/P_n + h/2 - d'_s) = 518.19 (539.17/518.19 + 0.60/2 - 0.05) = 668.71 \text{ kNm}$$

$$m_{nR} = M_{nR} / (f_c^* b_w d^2) = 668.71 / (25500 \times 0.25 \times 0.55^2) = 0.34676$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \times 0.01765)^{1/2} = 0.44639$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0.44639 / 0.85 = 0.52516 > 0.375 \Rightarrow A'_s \neq 0$$

$$M_c = f_c^* b_w d^2 k_{a\text{máx}} (1 - k_{a\text{máx}}/2) = 25500 \times 0.25 \times 0.55^2 \times 0.31875 \times (1 - 0.31875/2) = 516.72 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_n = M_{nR} - M_c = 668.71 - 516.72 = 151.99 \text{ kNm}$$

$$A'_s = \Delta M_n / [(f_y - f_c^*) \times (d - d'_s)] = 151.99 \times 10 / (394.50 \times 0.50) = 7.71 \text{ cm}^2$$

$$A_{sR} = f_c^* b_w k_{a\text{máx}} d / f_y + A'_s \times (f_y - f_c^*) / f_y =$$

$$A_{sR} = 25500 \times 0.25 \times 0.31875 \times 0.55 \times 10 / 420 + 7.71 \times 394.50 / 420 = 33.85 \text{ cm}^2$$

$$A_s = A_{sR} - P_n / f_y = 33.85 - 518.19 \times 10 / 420 = 21.51 \text{ cm}^2$$

CONCLUSIONES

- En la práctica diaria se presentan casos en los que una solución con armaduras asimétricas conduce a una economía en el consumo de acero
- La economía que se logra es variable con la excentricidad de la carga
- La existencia de un coeficiente de reducción de resistencias variable incrementa el rango de excentricidades para el que las armaduras asimétricas resultan convenientes
- Para un rango muy importante de excentricidades las expresiones de dimensionamiento propuestas son sencillas y fácilmente incorporables en una planilla de cálculo e incluso resultan aptas para un cálculo manual.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Proyecto de Reglamento CIRSOC 201, INTI, 2002

APÉNDICE: Cálculo de Armaduras en Flexión Simple

Nomenclatura

f'_c = resistencia especificada del hormigón

f_y = resistencia especificada del acero

M_u = Momento solicitante calculado para cargas mayoradas

M_n = Momento nominal (resistencia requerida para la sección) = M_u / ϕ

ϕ = Coeficiente de Reducción de Resistencia (se adopta una deformación mínima para el acero más traccionado de 0.005 de modo que, para todos los casos, este coeficiente vale 0.90)

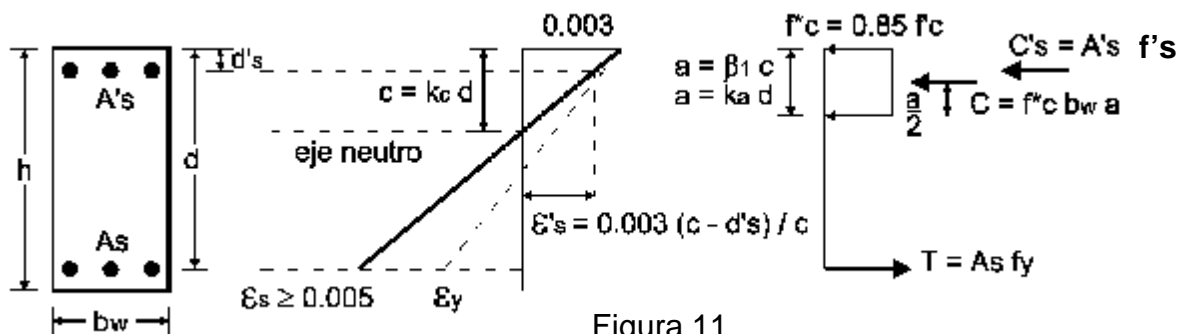


Figura 11

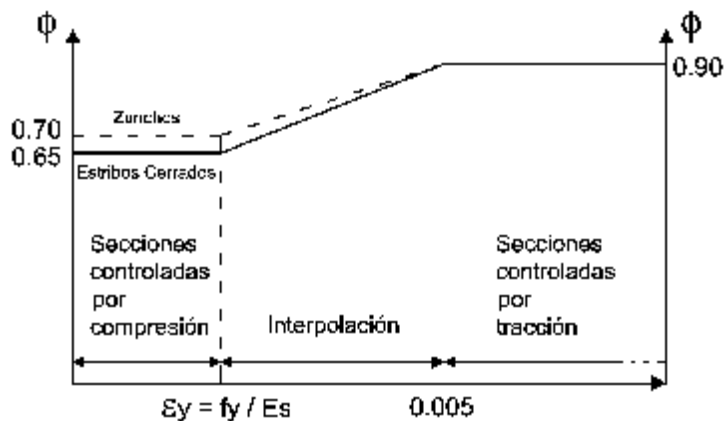


Figura 12

Cuantía Mínima (establecida en el CIRSOC 201)

Si $f'_c \leq 30$ MPa $ka_{\min} = 1.4 / f'_c = 1.4 / (0.85 f'_c)$

Si $f'_c > 30$ MPa $ka_{\min} = 1 / (3.4 \sqrt{f'_c})$

Cuantía Máxima (por razones de economía se fija $\epsilon_s \geq 0.005$)

$c_{\max} = 0.003 d / (0.003 + 0.005) = 0.375 d$

$kc_{\max} = c_{\max} / d = 0.375$

$ka_{\max} = kc_{\max} \beta_1 = 0.375 \beta_1$

Camino de Cálculo

$M_n = M_u / \phi = M_u / 0.9$

En primera instancia se supone que no es necesario disponer armadura comprimida:

$$M_n = f_c^* b_w a (d - a/2) = f_c^* b_w d^2 k_a (1 - k_a/2) \quad \text{y} \quad \text{llamando}$$

$$m_n = M_n / (f_c^* b_w d^2) \quad \text{resulta}$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 m_n)^{1/2}$$

a) Si $k_a \leq k_{a\text{mín}}$ se adopta $A_s = A_{s\text{mín}} = f_c^* b_w k_{a\text{mín}} d / f_y$ y $A'_s = 0$

b) Si $k_{a\text{mín}} < k_a \leq k_{a\text{máx}}$ se calcula $A_s = f_c^* b_w k_a d / f_y$ y $A'_s = 0$

c) Si $k_a > k_{a\text{máx}}$ se requerirá el uso de armadura comprimida, es decir $A'_s > 0$

El máximo momento que podrá tomar la sección comprimida de hormigón es:

$$M_c = f_c^* b_w d^2 k_{a\text{máx}} (1 - k_{a\text{máx}}/2)$$

por lo que el momento remanente deberá ser tomado por la armadura comprimida:

$$\Delta M_n = M'_s = M_n - M_c = A'_s (f'_s - f_c^*) (d - d'_s) \quad \text{donde la tensión "f'_s" surge de}$$

$$\varepsilon'_s = 0.003 (c - d'_s) / c$$

Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y = f_y / E_s = f_y / 200000 \text{ MPa}$ entonces $f'_s = E_s \varepsilon'_s$

Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$ entonces $f'_s = f_y$

por lo que se puede despejar la armadura comprimida como:

$$A'_s = \Delta M_n / [(f'_s - f_c^*)(d - d'_s)]$$

finalmente, de la sumatoria de fuerzas se obtiene

$$A_s = f_c^* b_w k_{a\text{máx}} d / f_y + A'_s (f'_s - f_c^*) / f_y$$

Si en cualquier situación se deseara conocer la deformación de la armadura más traccionada ésta se obtiene por semejanza de triángulos como:

$$\varepsilon_s = 0.003 (d - c) / c = 0.003 (1 - k_c) / k_c \quad \text{con} \quad k_c = k_a / \beta_1$$