



MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA VIGA EMPRESILLADA CONSIDERANDO EFECTOS DE CORTE

⁽¹⁾Dr. Ing. Jouglard, Claudio e ⁽²⁾Ing. Civil Peker Uri

Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional Buenos Aires. UTN.

⁽¹⁾claudio.jouglard@frba.utn.edu.ar y ⁽²⁾uripeker91@gmail.com

RESUMEN

El uso de vigas en celosía o con presillas se encuentra muy difundido entre las estructuras metálicas para cubrir grandes luces. En general, estas vigas están compuestas por una gran cantidad de barras que se modelan por elementos finitos considerando cada barra de manera individual lo que lleva a resolver sistemas con un gran número de ecuaciones.

A los efectos de predimensionamiento o para verificaciones sencillas es conveniente contar con una solución analítica simplificada que permita tratar a la viga como un continuo. Para ello adoptamos las hipótesis de una gran cantidad de presillas y es posible encontrar mediante técnicas variacionales una formulación aproximada continua para la deformada de la viga.

El objetivo de este trabajo es presentar la matriz de rigidez para un elemento finito de viga empresillada considerando la influencia de las deformaciones por corte. Este elemento puede incorporarse en un programa de elementos finitos y también puede utilizarse para obtener soluciones aproximadas en pórticos. Se presentan resultados comparando con el modelado completo por elementos finitos que muestran una excelente aproximación.

ABSTRACT

The use of lattice or battened beams is very extended in steel structures to cover large spaces. In general, these beams are composed by a large number of bars that are modelled by finite elements which give systems with a large number of equations.

In the previous stages of design or to do simple verifications is convenient to have a simplified analytical solution to assimilate the lattice beam to an equivalent solid beam. To do this we assume a large number of a repeated pattern of bars and using variational techniques it is possible to find an approximated continuous formulation for the displacements of the beam.

The purpose of this work is to obtain the stiffness matrix for a battened beam. These finite elements can be used to be incorporated into a finite element program and also to obtain approximate solutions in frames. Results are shown and comparisons are made with the finite element solution that show a very good approximation.



ANTECEDENTES

Las estructuras en celosía (conocidas en inglés como *lattice structures*) tienen gran aplicación entre las estructuras metálicas para cubrir grandes luces sin apoyos intermedios. Además, su bajo peso y facilidad de plegado y montaje las hace ideales para aplicaciones aeroespaciales lo que intensificó su estudio en esta área a partir de 1970 (Noor, 1988). También se utilizan en estructuras de soporte de antenas (Guzmán, 2014; Martín, 2017) y actualmente en el diseño de nuevos materiales (Helou & Kara, 2018) cuya microestructura exhibe un patrón repetitivo de barras interconectadas. En la figura 1 se muestran algunos modelos usuales.

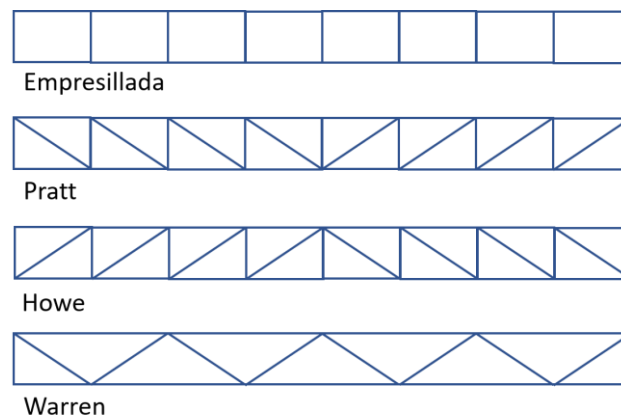


Figura 1. Modelos usuales de vigas en celosía.

En líneas generales (Noor, 1988) existen cuatro métodos para analizar estructuras en celosía: 1) método directo, 2) métodos de campo discreto, 3) métodos de estructuras periódicas y 4) analogía de medio continuo.

En el método directo la estructura es analizada por elementos finitos y se modela cada barra individualmente. En los métodos de campo discreto se asume que la estructura tiene una cierta regularidad y se plantean ecuaciones de equilibrio o energía en un nodo típico de la viga mediante diferencias finitas o usando series de Taylor para llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales. En los métodos de estructuras periódicas se combinan elementos finitos con matrices de transferencia para reducir los grados de libertad involucrados, aunque la solución es puramente numérica. Finalmente usando la analogía del medio continuo se reemplaza a la viga en celosía por un modelo continuo equivalente.

Entre las referencias locales podemos mencionar a (Filipich & Bambill, 2003; Filipich y col., 2010; Guzmán y col., 2019; Guzmán, 2014; Martín, 2017; Maurizi y col., 2004), donde se analizan varias estructuras en celosía, en particular, aplicadas a mástiles de antenas.

Previamente, en la referencia (Jouglard & Peker, 2019), se analizaron vigas empresilladas utilizando un método de campo discreto para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales equivalente cuya solución fue obtenida analíticamente y se obtuvieron buenas aproximaciones a la matriz de rigidez. Sin embargo, no se



consideró la distorsión producida por las deformaciones de corte, que resultan importantes para el caso de presillas muy rígidas.

Esto se mejoró en la referencia (Jouglard, 2020), donde se dedujeron las ecuaciones diferenciales equivalentes considerando la distorsión por corte y se obtuvieron buenas aproximaciones para la matriz de rigidez y los desplazamientos verticales y rotaciones. En dicho trabajo se utilizó el método de Rayleigh-Ritz (Rektorys, 1980) con aproximaciones polinomiales de los desplazamientos, aunque se consideró una variación lineal para los desplazamientos horizontales que como se demostrará en este trabajo, es insuficiente para obtener una buena aproximación de los desplazamientos y esfuerzos axiales de la viga empresillada.

OBJETIVOS

Usualmente el modelado de las vigas en celosía y las estructuras formadas por estas piezas se realiza por elementos finitos utilizando un elemento por barra lo que lleva a considerar un gran número de grados de libertad. Esto hace, que el análisis de estas estructuras sea costoso computacionalmente, especialmente si el análisis es no lineal, como recomiendan las normativas actuales. Luego resulta conveniente sustituir a la viga en celosía por una viga maciza equivalente para disminuir los grados de libertad.

El comportamiento de una viga en celosía es bastante similar al de una viga maciza, aunque presenta una mayor deformación por corte debido a la flexibilidad de las celosías.

Una primera simplificación podría consistir en aproximar la viga en celosía por una viga maciza con la misma inercia y área, pero esto ignora la deformación por corte. Si se considera una como una viga con deformación por corte la aproximación no es buena pues el comportamiento es diferente como veremos en los ejemplos.

Luego el objetivo de este trabajo es obtener una matriz de rigidez para una viga empresillada considerando la deformación por corte. Deduciremos una forma aproximada de la energía de deformación que será utilizada para obtener los desplazamientos de largueros y presillas que serán asumidos polinomiales. Luego a partir de la energía de deformación y los desplazamientos propuestos podremos obtener la matriz de rigidez equivalente que nos permitirá modelar el comportamiento de la viga empresillada con sólo seis grados de libertad.

DEFINICION DEL MODELO

Consideremos una viga empresillada compuesta por dos barras longitudinales (largueros) de longitud L y presillas verticales de altura h separadas uniformemente una distancia d . Además, consideramos que los dos largueros son iguales y tienen área A_l e inercia J_l . Las presillas tienen área A_p e inercia J_p . Los largueros tienen módulo de elasticidad E_l y las presillas E_p .

Definimos un sistema de coordenadas local x , y con origen a mitad de la altura y sobre el borde izquierdo. Las uniones internas se asumen rígidas y por lo tanto durante la deformación un nodo k de la viga se desplaza con traslaciones u_k , v_k , según x , y y



sufre una rotación Θ_k en el plano.

Llamaremos $u_{sk}, v_{sk}, \Theta_{sk}$ a los desplazamientos nodales del nodo k del larguero superior y $u_{ik}, v_{ik}, \Theta_{ik}$ para el nodo k del larguero inferior (ver figura 2).

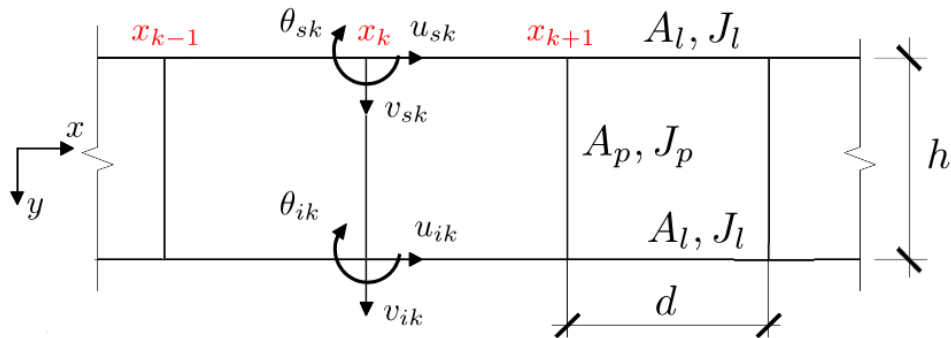


Figura 2. Sector de viga empresillada

Si conociéramos todos los desplazamientos nodales podríamos obtener el estado tensional y de deformaciones de cada barra de la viga empresillada. Asumiremos que es posible aproximar los desplazamientos y giros de cada nodo mediante funciones continuas $u_s(x), v_s(x), \Theta_s(x)$ para el larguero superior y $u_i(x), v_i(x), \Theta_i(x)$ para el larguero inferior.

Luego podemos aproximar los desplazamientos nodales como

$$\begin{aligned}
 u_{sk} &\approx u_s(x_k) & u_{ik} &\approx u_i(x_k) \\
 v_{sk} &\approx v_s(x_k) & v_{ik} &\approx v_i(x_k) \\
 \theta_{sk} &\approx \theta_s(x_k) & \theta_{ik} &\approx \theta_i(x_k)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Si los largueros son suficientemente flexibles se puede producir un efecto de deformación por distorsión, como se muestra en la figura 3. Este efecto es equivalente al de deformación por corte en vigas macizas y se manifiesta por la aparición de una rotación adicional por corte.

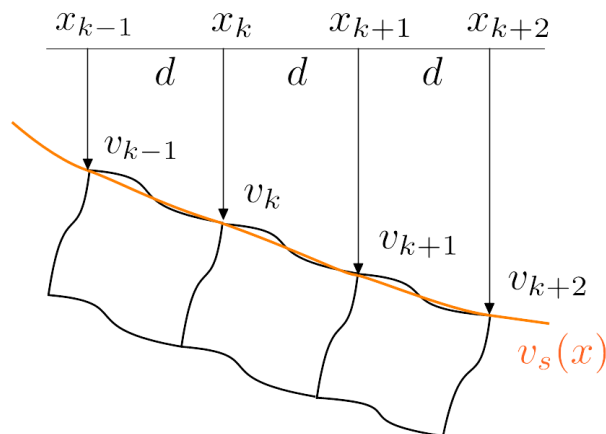


Figura 3. Efecto de distorsión



Si analizamos el giro en un nodo deformado del larguero superior podemos distinguir tres ángulos (figura 4): 1) Θ_s que es el giro efectivo del nodo en el plano del nodo, 2) Φ_s que es el giro por flexión y 3) ψ_s que es el giro por distorsión o corte.

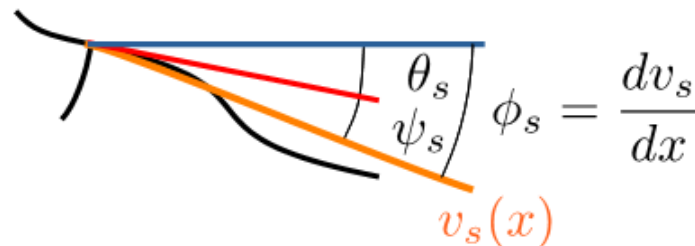


Figura 4. Giros por flexión y corte

El ángulo Θ_s es el giro efectivo del nodo y sería el ángulo que se obtiene si hiciéramos un análisis por elementos finitos de la viga empresillada.

El ángulo Φ_s es el ángulo entre la horizontal y la tangente de los desplazamientos transversales $v_s(x)$. Para desplazamientos pequeños, dicho ángulo se puede asimilar a la derivada, esto es

$$\phi_s = \frac{dv_s}{dx} \quad (2)$$

El ángulo de distorsión ψ_s sería equivalente a la distorsión por corte en una viga maciza y se obtiene por diferencia como

$$\psi_s = \frac{dv_s}{dx} - \theta_s \quad (3)$$

Notemos que la función $v_s(x)$ no representa los desplazamientos del larguero, sino los desplazamientos de los nodos.

ENERGIA DE DEFORMACION

La energía de deformación de un sistema se compone de la suma de las energías de sus partes deformables. Por lo tanto, para una viga empresillada su energía de deformación U estará compuesta por las energías de deformación U_s y U_i de los largueros superior e inferior y por la energía de deformación U_p de las presillas:

$$U = U_s + U_i + U_p \quad (4)$$

donde estas energías se obtendrán sumando las energías de deformación de cada barra y asumiremos que cada barra es esbelta, esto es, se pueden despreciar las deformaciones por corte en cada barra, y además consideraremos todas las uniones rígidas.



Energía de deformación de las presillas

La energía de deformación de las presillas se puede calcular a partir de su matriz de rigidez como barra maciza (Cook, 2001) y de los desplazamientos extremos. Para la k -ésima presilla en la posición x_k los desplazamientos extremos son los mostrados en la figura 5.

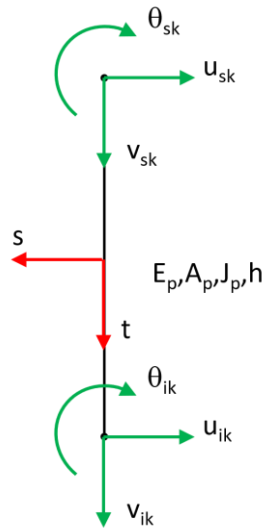


Figura 5. Desplazamientos extremos en presilla

Luego usando la matriz local de rigidez la energía de esta presilla es

$$U_{pk} = \frac{E_p A_p}{2h} (v_{ik} - v_{sk})^2 + \frac{6E_p J_p}{h^3} (u_{ik} - u_{sk})^2 + \frac{6E_p J_p}{h^2} (u_{ik} - u_{sk})(\theta_{sk} + \theta_{ik}) + \frac{2E_p J_p}{h} ((\theta_{sk})^2 + \theta_{sk}\theta_{ik} + (\theta_{ik})^2) \quad (5)$$

Notando que los giros nodales se pueden expresar como

$$\theta_{sk} = v'_{sk} - \psi_{sk} \quad \theta_{ik} = v'_{ik} - \psi_{ik} \quad (6)$$

Luego la energía de deformación de la k -ésima presilla queda

$$U_{pk} = \frac{E_p A_p}{2h} (v_{ik} - v_{sk})^2 + \frac{6E_p J_p}{h^3} (u_{ik} - u_{sk})^2 + \frac{6E_p J_p}{h^2} (u_{ik} - u_{sk})(v'_{sk} + v'_{ik} - \psi_{sk} - \psi_{ik}) + \frac{2E_p J_p}{h} ((v'_{sk} - \psi_{sk})^2 + (v'_{sk} - \psi_{sk})(v'_{ik} - \psi_{ik}) + (v'_{ik} - \psi_{ik})^2) \quad (7)$$

La energía de deformación para todas las presillas será la suma de las energías de cada presilla y asumiendo que hay una gran cantidad de presillas y que la distancia d es pequeña con respecto a la longitud L tenemos:

$$U_p = \sum_k U_{pk} \approx \frac{1}{d} \int_0^L U_{pk}(x) dx \quad (8)$$

Aproximando los desplazamientos nodales por funciones continuas (ec. (1)) tenemos

$$U_p = \int_0^L \left[\frac{E_p A_p}{2dh} (v_i - v_s)^2 + \frac{6E_p J_p}{dh^3} (u_i - u_s)^2 + \frac{6E_p J_p}{dh^2} (u_i - u_s) (v'_s + v'_i - \psi_s - \psi_i) + \frac{2E_p J_p}{dh} \left((v'_s - \psi_s)^2 + (v'_s - \psi_s)(v'_i - \psi_i) + (v'_i - \psi_i)^2 \right) \right] dx \quad (9)$$

Energía de deformación de los largueros

La energía de deformación de los largueros se puede calcular de manera similar. Considerando el sector de larguero superior ubicado entre los nodos x_k y x_{k+1} los desplazamientos extremos son los mostrados en la figura 6.

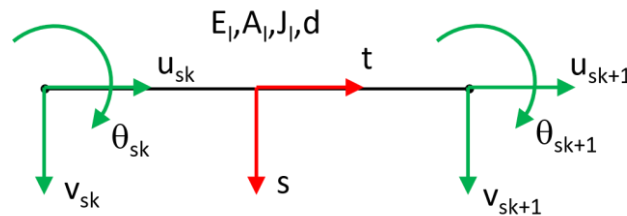


Figura 6. Desplazamientos extremos de larguero

Luego la energía de deformación de este sector de larguero es

$$U_{sk} = \frac{E_l A_l}{2d} (u_{sk+1} - u_{sk})^2 + \frac{6E_l J_l}{d^3} (v_{sk} - v_{sk+1})^2 + \frac{6E_l J_l}{d^2} (v_{sk} - v_{sk+1})(\theta_{sk} + \theta_{sk+1}) + \frac{2E_l J_l}{d} \left((\theta_{sk})^2 + \theta_{sk} \theta_{sk+1} + (\theta_{sk+1})^2 \right) \quad (10)$$

Notemos que ahora, a diferencia de las presillas, participan desplazamientos y giros asociados a dos nodos, x_k y x_{k+1} , luego si asumimos que la distancia d entre presillas es muy pequeña podemos usar series de Taylor para aproximar los desplazamientos y giros en x_{k+1} a partir de los desplazamientos y giros en x_k como



$$\begin{aligned}u_{sk+1} &\approx u_{sk} + u'_{sk}d \\v_{sk+1} &\approx v_{sk} + v'_{sk}d + v''_{sk}\frac{d^2}{2} \\v'_{sk+1} &\approx v'_{sk} + v''_{sk}d \\\psi_{sk+1} &\approx \psi_{sk}\end{aligned}\quad (11)$$

Donde hemos asumido que los desplazamientos de un nodo del larguero superior varían como en una viga maciza sometida a esfuerzos constantes (Wang y col., 2002).

Sustituyendo los giros nodales en función de la distorsión por corte, ec. (6), y reemplazando los desplazamiento y giros nodales en x_{k+1} llegamos a

$$U_{sk} \approx \frac{E_l A_l}{2d} (u'_{sk}d)^2 + \frac{E_l J_l d}{2} (v''_{sk})^2 + \frac{2E_l J_l}{d} (3(\psi_{sk})^2) \quad (12)$$

La energía de deformación para todo el larguero será la suma de las energías de cada sector de larguero y asumiendo que hay una gran cantidad de sectores y que la distancia d es pequeña con respecto a la longitud total L tenemos:

$$U_s = \sum_k U_{sk} \approx \frac{1}{d} \int_0^L U_{sk}(x) dx \quad (13)$$

Aproximando los desplazamientos nodales por funciones continuas (ec. (1)) tenemos

$$U_s = \int_0^L \left[\frac{E_l A_l}{2} (u'_s)^2 + \frac{E_l J_l}{2} (v''_s)^2 + \frac{6E_l J_l}{d^2} (\psi_s)^2 \right] dx \quad (14)$$

De manera análoga para el larguero inferior su energía de deformación es

$$U_i = \int_0^L \left[\frac{E_l A_l}{2} (u'_i)^2 + \frac{E_l J_l}{2} (v''_i)^2 + \frac{6E_l J_l}{d^2} (\psi_i)^2 \right] dx \quad (15)$$

TRABAJO DE LAS FUERZAS GENERALIZADAS EN APOYOS

Consideramos que la viga está descargada en el tramo y solo está sometida a fuerzas generalizadas en los apoyos donde se asume que los bordes se mueven como cuerpo rígido con dos traslaciones y una rotación que referiremos al punto medio de cada extremo.

Llamaremos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ a las traslaciones según x, y y al giro en el apoyo izquierdo. Y $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ a los mismos desplazamientos y giros en el apoyo derecho (figura 7).

En correspondencia con los desplazamientos generalizados de cada extremo tendremos esfuerzos generalizados actuantes S_i asociados a cada desplazamiento generalizado Δ_i (figura 7).

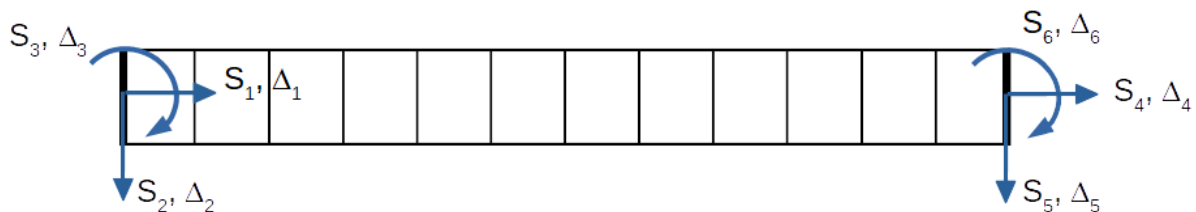


Figura 7. Desplazamientos y esfuerzos generalizados en extremos

El trabajo W_S de las fuerzas generalizadas en los extremos es simplemente el producto de cada fuerza generalizada S_i por su desplazamiento generalizado Δ_i .

$$W_S = \sum S_i \Delta_i = S_1 \Delta_1 + S_2 \Delta_2 + S_3 \Delta_3 + S_4 \Delta_4 + S_5 \Delta_5 + S_6 \Delta_6 \quad (16)$$

APROXIMACION DE LA DEFORMADA

Debemos encontrar las aproximaciones $u_s(x)$, $v_s(x)$, $\Theta_s(x)$ y $u_i(x)$, $v_i(x)$, $\Theta_i(x)$ para los desplazamientos y giros nodales que se producen cuando la viga empresillada está sometida a desplazamientos generalizados Δ_i en sus extremos.

Usaremos el método de Rayleigh-Ritz (Rektorys, 1980) para obtener estas aproximaciones. En este método, aplicable a sistemas conservativos o sea que posean energía potencial, se proponen funciones con constantes libres a determinar para las funciones a aproximar. Usualmente se utilizan polinomios y las funciones propuestas para desplazamientos y giros son:

$$\begin{aligned} \psi_s(\eta) &= c_1 \\ \psi_i(\eta) &= c_2 \\ u_s(\eta) &= (c_5 + c_6\eta + c_3\eta^2)L \\ u_i(\eta) &= (c_7 + c_8\eta + c_4\eta^2)L \\ v_s(\eta) &= (c_9 + c_{10}\eta + c_{11}\eta^2 + c_{12}\eta^3)L \\ v_i(\eta) &= (c_{13} + c_{14}\eta + c_{15}\eta^2 + c_{16}\eta^3)L \end{aligned} \quad (17)$$

siendo la variable $\eta = x/L$.

Notemos que se ha asumido un valor constante para las deformaciones por corte ψ_s ,



ψ_i . Esto es compatible con la teoría de Timoshenko para vigas macizas deformables por corte y sin carga en el tramo (Wang y col., 2000) y es la aproximación más básica para la distorsión por corte.

Además, hemos adoptado una variación cuadrática para los desplazamientos horizontales u_s, u_i y una variación cúbica para los desplazamientos verticales v_s, v_i . Estas variaciones dan la solución exacta si los largueros están descargados y las presillas tienen rigidez despreciable.

Las aproximaciones propuestas deben cumplir las condiciones esenciales de contorno (Rektorys, 1980).

Condiciones esenciales de contorno

Como hemos asumido que los apoyos de la viga empresillada son rígidos entonces podemos relacionar los desplazamientos v, u, ψ de los largueros en los extremos con los desplazamientos generalizados Δ_i .

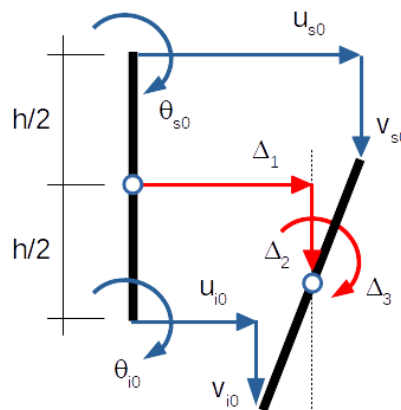


Figura 8. Desplazamientos y rotaciones en extremo izquierdo.

Asumiendo que las rotaciones generalizadas sean muy pequeñas, podemos establecer las siguientes relaciones para los desplazamientos de los extremos del larguero superior

$$\begin{aligned}
 u_{s0} &= \Delta_1 + \Delta_3 \frac{h}{2} & u_{sL} &= \Delta_4 + \Delta_6 \frac{h}{2} \\
 v_{s0} &= \Delta_2 & v_{sL} &= \Delta_5 \\
 \psi_{s0} &= v'_{s0} - \Delta_3 & \psi_{sL} &= v'_{sL} - \Delta_6
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

y para los extremos del larguero inferior

$$\begin{aligned}
 u_{i0} &= \Delta_1 - \Delta_3 \frac{h}{2} & u_{iL} &= \Delta_4 - \Delta_6 \frac{h}{2} \\
 v_{i0} &= \Delta_2 & v_{iL} &= \Delta_5 \\
 \psi_{i0} &= v'_{i0} - \Delta_3 & \psi_{iL} &= v'_{iL} - \Delta_6
 \end{aligned}
 \tag{19}$$



Deformada para desplazamientos generalizados impuestos en extremos

Imponiendo las condiciones de contorno a las aproximaciones (17) obtenemos las siguientes funciones de desplazamientos nodales para el larguero superior

$$u_s(\eta) = \left(\Delta_1 + \Delta_3 \frac{h}{2}\right)(1 - \eta) + \left(\Delta_4 + \Delta_6 \frac{h}{2}\right)(\eta) + c_3(\eta^2 - \eta)L \quad (20)$$

$$v_s(\eta) = \Delta_2(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) + \Delta_3L(\eta - 2\eta^2 + \eta^3) + \Delta_5(3\eta^2 - 2\eta^3) \\ + \Delta_6L(\eta^3 - \eta^2) + c_1(\eta - 3\eta^2 + 2\eta^3)L$$

$$\psi_s(\eta) = c_1$$

y para el larguero inferior

$$u_i(\eta) = \left(\Delta_1 - \Delta_3 \frac{h}{2}\right)(1 - \eta) + \left(\Delta_4 - \Delta_6 \frac{h}{2}\right)(\eta) + c_4(\eta^2 - \eta)L \quad (21)$$

$$v_i(\eta) = \Delta_2(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) + \Delta_3L(\eta - 2\eta^2 + \eta^3) + \Delta_5(3\eta^2 - 2\eta^3) \\ + \Delta_6L(\eta^3 - \eta^2) + c_2(\eta - 3\eta^2 + 2\eta^3)L$$

$$\psi_i(\eta) = c_2$$

Notemos que tenemos 4 constantes libres a determinar c_1, c_2, c_3, c_4 .

Determinación de las constantes libres

La energía potencial total del sistema V se compone de la suma de las energías de deformación menos el trabajo de las fuerzas conservativas

$$V(c_i) = U_p(c_i) + U_s(c_i) + U_i(c_i) - W_S \quad (22)$$

El método de Rayleigh-Ritz se basa en minimizar la energía potencial respecto de las constantes libres c_i . Para ello debemos igualar a cero a las derivadas de la energía potencial total respecto de cada constante libre c_i

$$\frac{\partial V}{\partial c_i} = 0 \quad (23)$$

Esto nos dá un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Resolviendo dicho sistema (Jouglard, 2021) obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 = c_2 &= -\alpha_1 \left[(\Delta_6 + \Delta_3) + \frac{2}{L}(\Delta_2 - \Delta_5) \right] \\ c_3 = -c_4 &= +\alpha_2 \left[(\Delta_6 + \Delta_3) + \frac{2}{L}(\Delta_2 - \Delta_5) \right] \end{aligned}} \quad (24)$$

donde las constantes α_1, α_2 valen



$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{5s_1 + 3s_2 + 12}{(5s_1 + 12)(r_1^2 + 1) + 3s_2}$$
$$\alpha_2 = \frac{18r_2}{(5s_1 + 12)(r_1^2 + 1) + 3s_2}$$
(25)

donde los coeficientes adimensionales s_1, s_2, r_1, r_2 valen

$$s_1 = \frac{E_l A_l h^3 d}{E_p J_p L^2} \quad r_1 = \frac{L}{d}$$
$$s_2 = \frac{A_l h^2}{J_l} \quad r_2 = \frac{Lh}{d^2}$$
(26)

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA VIGA EMPRESILLADA

La matriz de rigidez \mathbf{K} relaciona los desplazamientos generalizados con las fuerzas generalizadas en extremos como

$$\mathbf{K} \cdot \Delta = \mathbf{S}$$
(27)

donde \mathbf{S} es el vector de esfuerzos generalizados

$$\mathbf{S}^T = \{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6\}^T$$
(28)

y Δ es el vector de desplazamientos generalizados en extremos

$$\Delta^T = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 \ \Delta_4 \ \Delta_5 \ \Delta_6\}^T$$
(29)

y los elementos de la matriz de rigidez vienen dados por las derivadas

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_j \partial \Delta_i} = k_{ji}$$
(30)

Resultando en la siguiente matriz simétrica

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$
(31)



Siendo los coeficientes de rigidez

$$\begin{aligned}k_{11} &= -k_{14} = k_{44} = 2\frac{E_l A_l}{L} \\k_{22} &= -k_{25} = k_{55} = \frac{8E_p J_p}{5dhL}\alpha_3^2 + \frac{24E_l J_l}{L^3}\alpha_4 + \frac{8E_l A_l}{3L}\alpha_2^2 \\k_{23} &= k_{26} = -k_{35} = -k_{56} = \frac{4E_p J_p}{5dh}\alpha_3^2 + \frac{12E_l J_l}{L^2}\alpha_4 + \frac{4E_l A_l}{3}\alpha_2^2 \\k_{33} &= k_{66} = \frac{2E_p J_p L}{5dh}\alpha_3^2 + \frac{2E_l J_l}{L}(3\alpha_4 + 1) + \frac{E_l A_l h^2}{6L}\alpha_5 \\k_{36} &= \frac{2E_p J_p L}{5dh}\alpha_3^2 + \frac{2E_l J_l}{L}(3\alpha_4 - 1) + \frac{E_l A_l h^2}{6L}\alpha_6\end{aligned}\quad (32)$$

donde los coeficientes adimensionales $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ son

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 3(1 - 2\alpha_1) - 2\left(\frac{L}{h}\right)\alpha_2 \\ \alpha_4 &= (1 - 2\alpha_1)^2 + 4\alpha_1^2\left(\frac{L}{d}\right)^2 \\ \alpha_5 &= 4\left(\frac{L}{h}\right)^2\alpha_2^2 + 3 \\ \alpha_6 &= 4\left(\frac{L}{h}\right)^2\alpha_2^2 - 3\end{aligned}\quad (33)$$

y los coeficientes α_1, α_2 vienen dados por la ecuación (25).

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se ha tomado para el análisis una viga empresillada de una longitud $L = 8$ m, con una altura $h = 1$ m y una separación de presillas $d = 0,5$ m. Esta viga se ha modelado por elementos finitos con el programa *Abaqus* considerando un elemento finito por presilla y por cada sector de larguero resultando en una malla de 34 nodos o sea 102 grados de libertad, considerando dos desplazamientos y una rotación por nodo.

Dado que el comportamiento varía sensiblemente según la relación de rigideces entre largueros y presillas consideraremos tres combinaciones posibles de rigideces: 1) largueros mucho más rígidos que las presillas, 2) largueros de igual sección que las presillas y 3) largueros mucho más flexibles que las presillas.

Para el caso de largueros muy rígidos se han considerado los largueros constituidos de barras cilíndricas de 4 in de diámetro (radio = 50.8 mm) y presillas, también constituidos de barras cilíndricas, de 1/2 in de diámetro (radio= 6.35 mm).

Para el caso de largueros y presillas con igual sección se han considerado los



largueros y las presillas ambos constituidos de barras cilíndricas de 4 in de diámetro.

Para el caso de largueros flexibles se han invertido los diámetros considerando los largueros constituidos de barras cilíndricas de 1/2 in de diámetro (radio = 6.35 mm) y presillas constituidas de barras cilíndricas de 4 in de diámetro (radio= 50.8 mm).

Se considera a la viga descargada en el tramo y empotrada en el extremo derecho sometida a un desplazamiento vertical unitario en el extremo izquierdo. Esto es, con un desplazamiento generalizado $\Delta 2 = 1$ y el resto nulo.

En la figura 9 se muestra la deformada de la viga empresillada con largueros rígidos cuya deformada se asemeja bastante a la cúbica de una viga maciza.

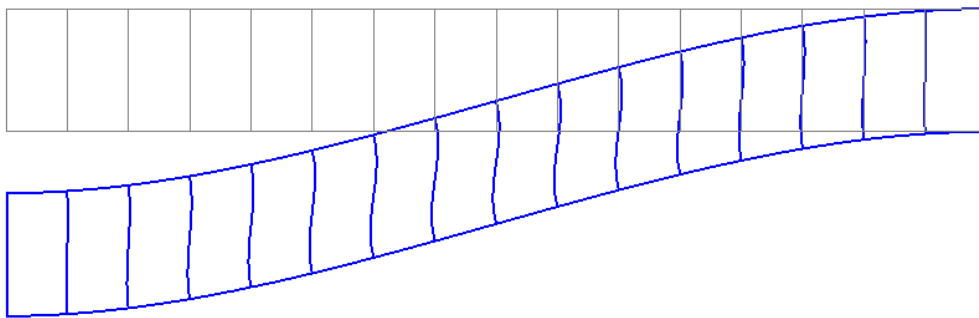


Figura 9. Deformada de la viga empresillada con largueros rígidos

En la figura 10 se muestra la deformada de la viga empresillada con largueros flexibles. Notemos que las presillas prácticamente no se deforman en comparación a los sectores de largueros y además, permanecen verticales, adoptando la forma típica de una viga deformada predominantemente por corte.

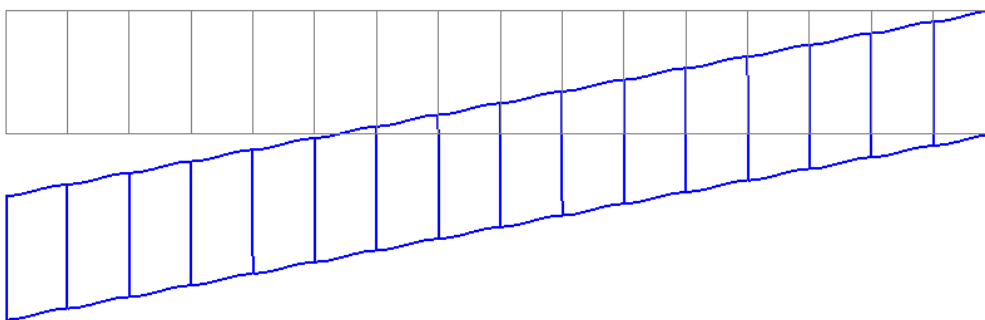


Figura 10. Deformada de la viga empresillada con largueros flexibles

En las figuras 11, 12 y 13 se muestran los desplazamientos verticales de los nodos del larguero superior comparados con los obtenidos con la solución polinomial propuesta aquí para los distintos tipos de rigideces.

Notemos que cuando los largueros son rígidos los desplazamientos nodales verticales son similares a la clásica deformada cúbica de vigas macizas, pero a medida que los largueros se van haciendo más flexibles los desplazamientos verticales se van

tornando lineales.

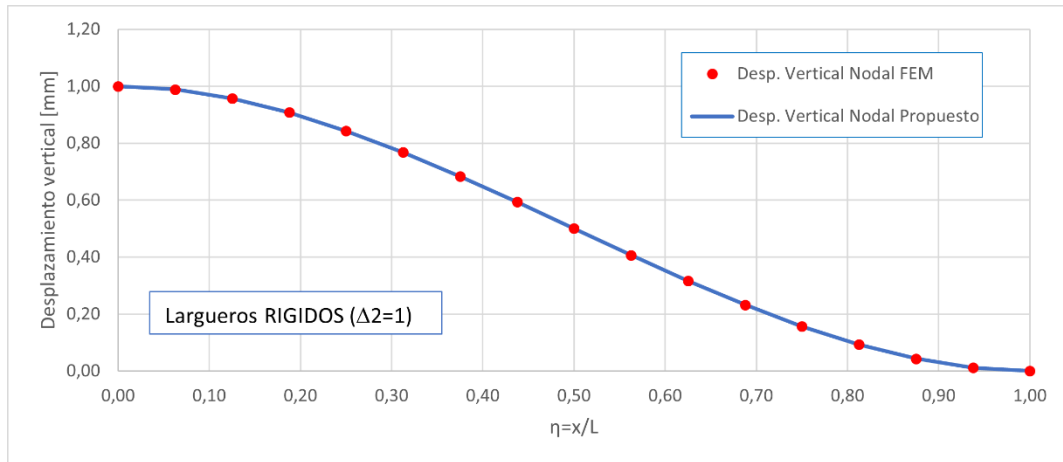


Figura 11. Desplazamiento nodal vertical para largueros rígidos

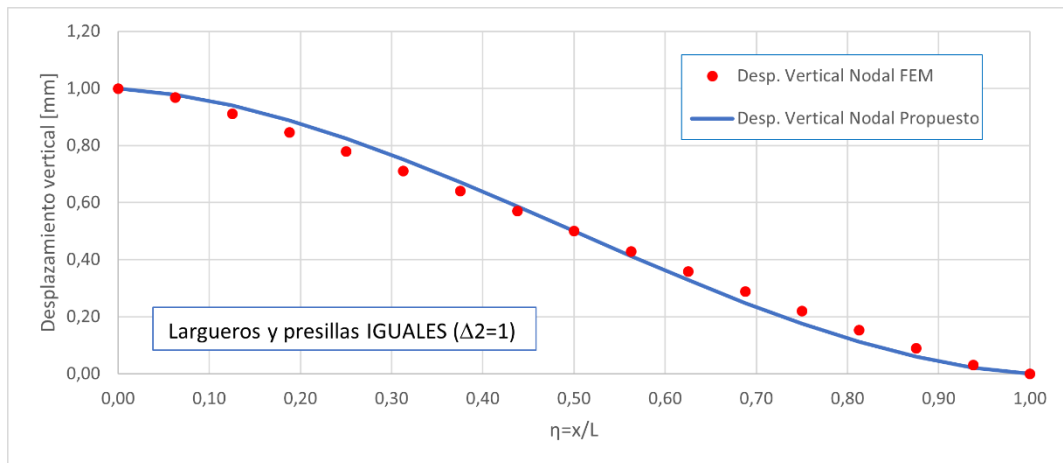


Figura 12. Desplazamiento nodal vertical para largueros y presillas iguales

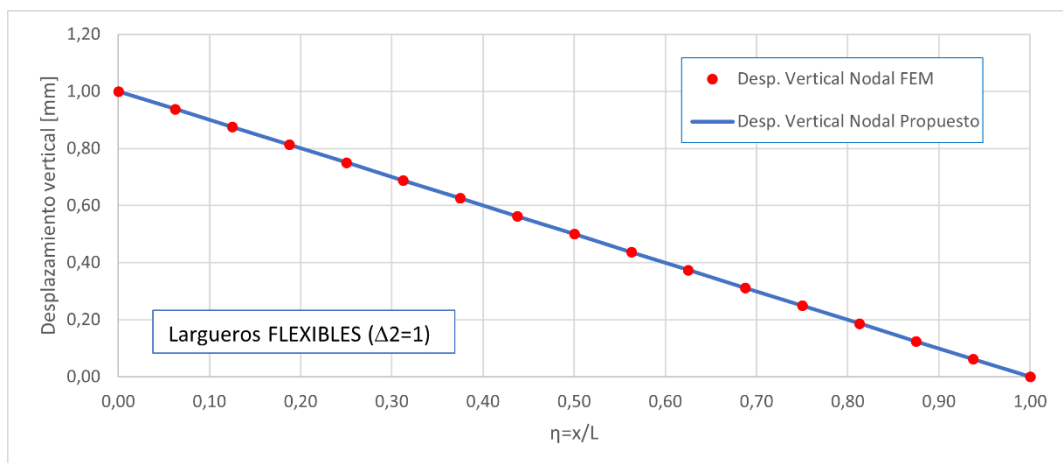


Figura 13. Desplazamiento nodal vertical para largueros flexibles

En las figuras 14, 15 y 16 se muestran los giros efectivos de los nodos del larguero superior comparados con los obtenidos con la solución polinomial propuesta aquí para los distintos tipos de rigideces.

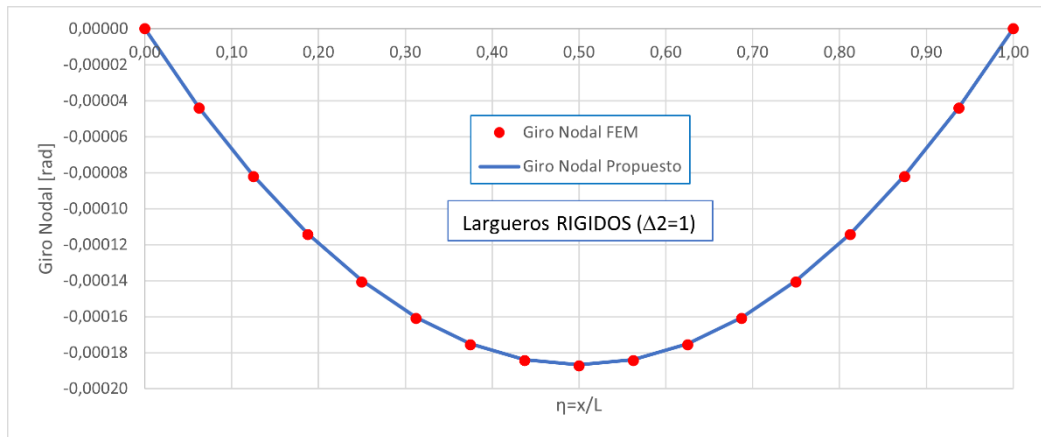


Figura 14. Giro nodal para largueros rígidos

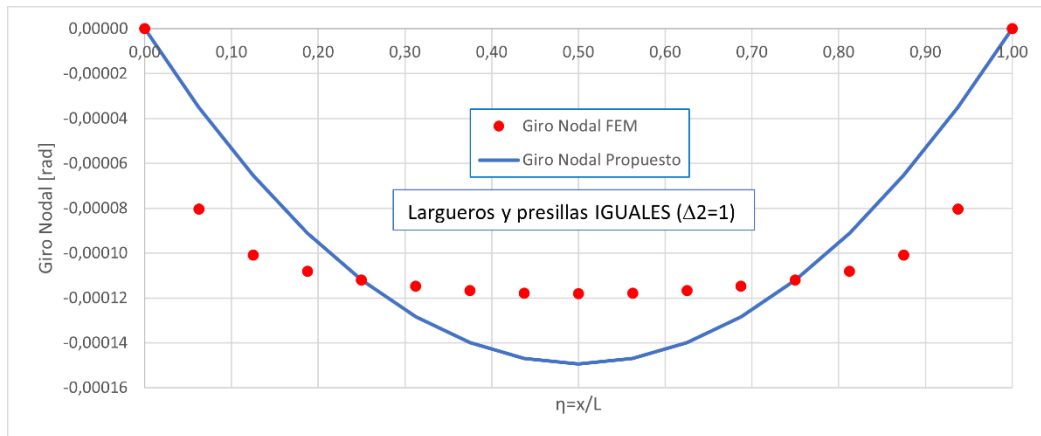


Figura 15. Giro nodal para largueros y presillas iguales

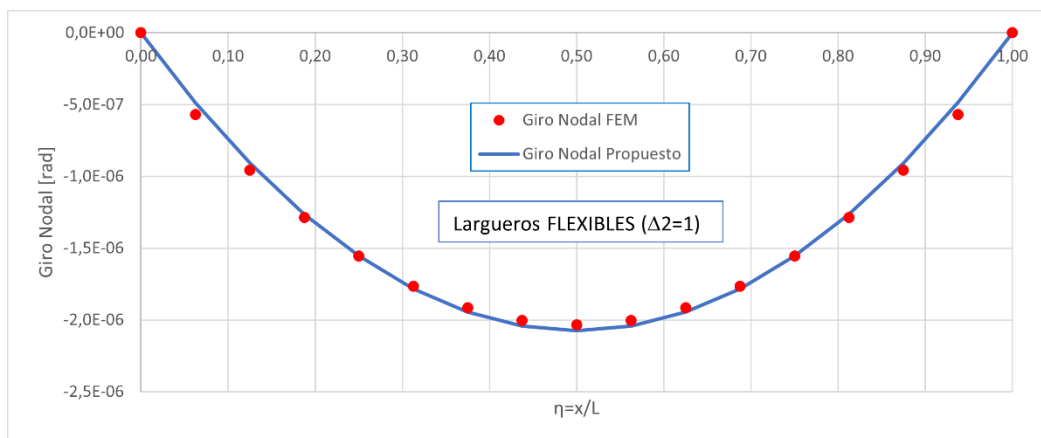


Figura 16. Giro nodal para largueros flexibles

Notemos que para largueros muy flexibles (presillas rígidas) las rotaciones nodales son prácticamente nulas. Además, se tiene una muy buena aproximación a los giros nodales en los casos extremos de largueros muy rígidos o muy flexibles, sin embargo, para casos intermedios, con rigideces similares entre largueros y presillas, la aproximación a los giros nodales no es tan buena. Esto es debido a que para esta combinación de rigideces la aproximación constante supuesta para la distorsión cortante no se verifica, como se mostrará a continuación.

En las figuras 17, 18 y 19 se muestra las distorsiones por corte “real” de los nodos del larguero superior comparadas con la distorsión constante propuesta aquí para los distintos tipos de rigideces.

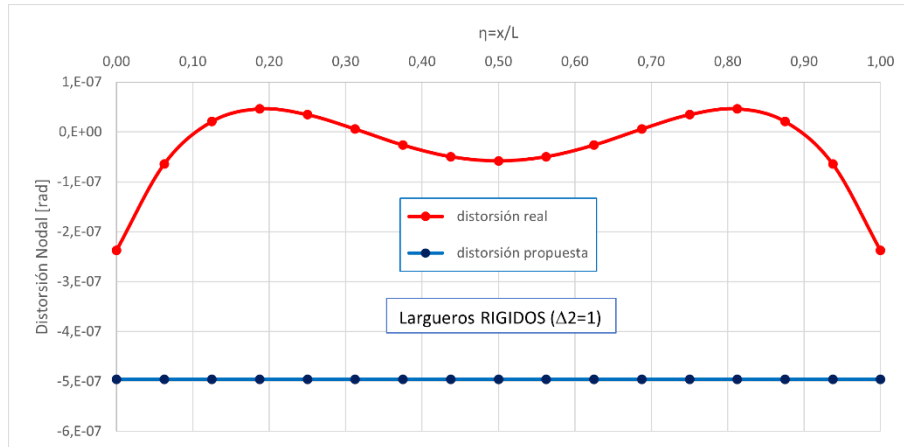


Figura 17. Distorsión nodal para largueros rígidos

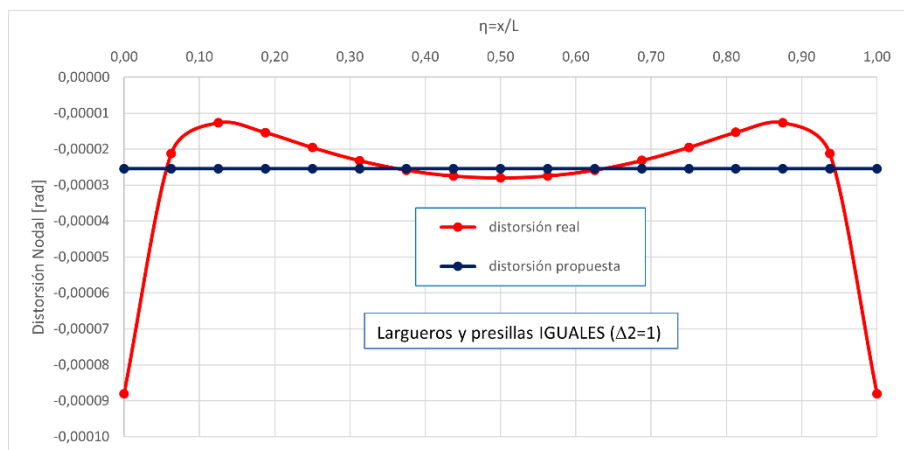


Figura 18. Distorsión nodal para largueros y presillas iguales

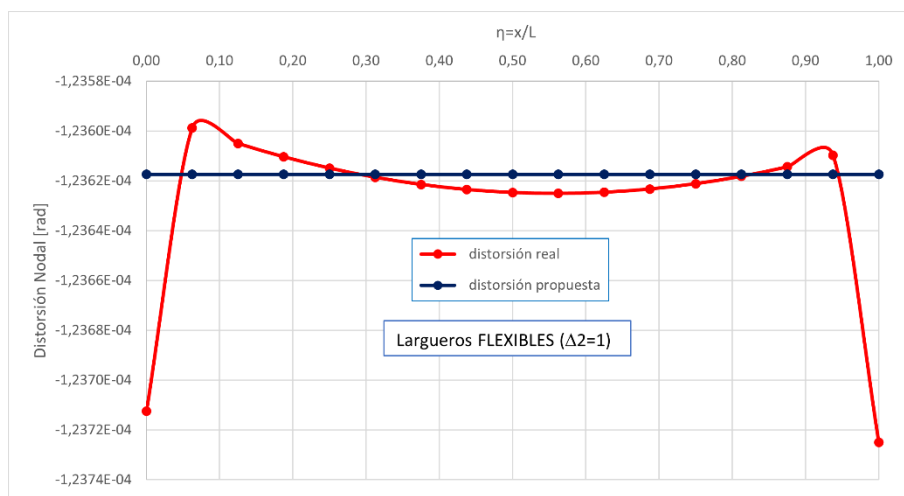


Figura 19. Distorsión nodal para largueros flexibles

Para el cálculo de la distorsión “real” se ajustó la deformada nodal vertical v_s con un

polinomio cúbico y luego se calculó la rotación por flexión derivando este polinomio. Notemos que las diferencias mayores se producen en los extremos.

En las figuras 20, 21 y 22 se muestran los momentos flectores en el larguero superior comparados con los obtenidos con las aproximaciones polinomiales propuestas aquí para los distintos tipos de rigideces.

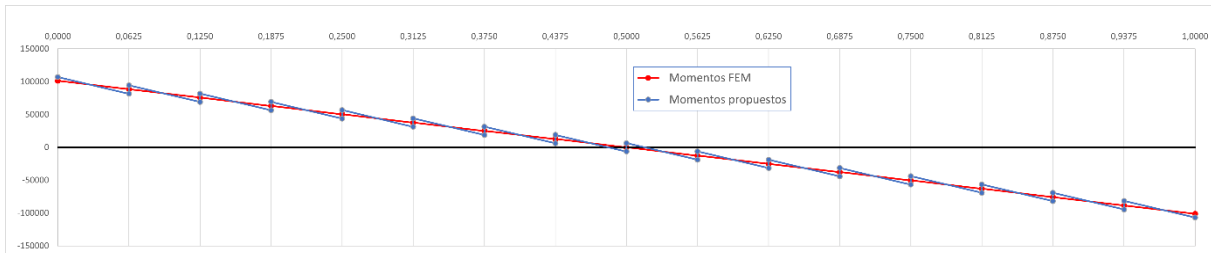


Figura 20. Desplazamiento nodal vertical para largueros rígidos

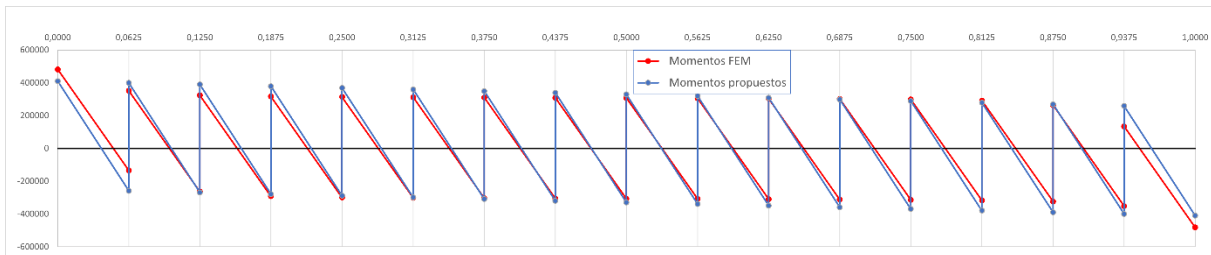


Figura 21. Desplazamiento nodal vertical para largueros y presillas iguales

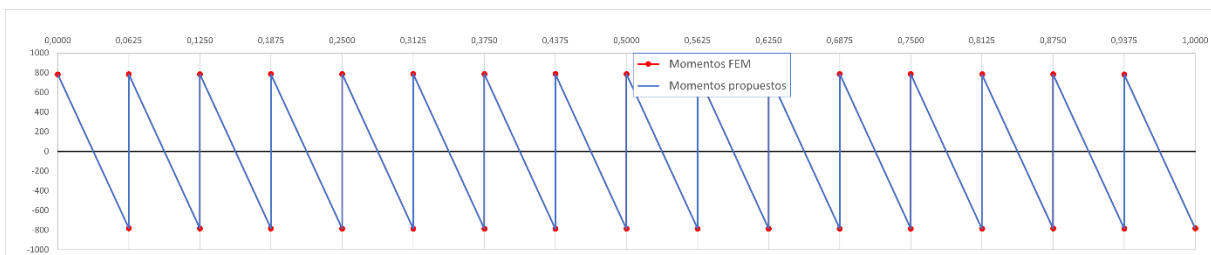


Figura 22. Desplazamiento nodal vertical para largueros flexibles

Notemos la buena aproximación en todos los casos, produciéndose el mayor error en el caso de intermedio de largueros y presillas iguales donde en las proximidades de los apoyos el error relativo es del orden del 15 %.

CONCLUSIONES

Se ha mostrado la deducción de la matriz de rigidez equivalente para una viga empresillada que tiene seis grados de libertad. La mayoría de los programas comerciales requieren modelar cada barra de manera individual.

Se podría pensar en sustituir a la viga empresillada por una viga maciza equivalente pero independientemente de las aproximaciones utilizadas siempre se obtendrán diagramas de esfuerzos suaves y continuos cuando esto sólo es válido para largueros muy rígidos ya que para largueros flexibles (o presillas rígidas) los diagramas de

momentos son discontinuos, como se ve en las figuras 21 y 22.

Notemos que se consiguen reducciones muy importantes en los grados de libertad, 6 para la matriz presentada contra 102 grados de libertad para los ejemplos de elementos finitos mostrados. Esto es importante porque los tiempos de solución son, en general, más que proporcionales a los grados de libertad (Jennings, 1977). Esta diferencia es más notable para problemas no lineales donde deben resolverse reiteradas veces sistemas de ecuaciones del tamaño de los grados de libertad.

En los resultados mostrados de momentos el mayor error relativo es del orden del 15% que, si bien parece algo grande, debe tenerse en cuenta que el objetivo aquí es utilizar la matriz de rigidez equivalente para diseños iniciales o verificaciones sencillas que puedan implementarse incluso en una planilla de cálculo.

Este error se produce por adoptar una distorsión por corte constante cuando en realidad presenta variaciones importantes cerca de los extremos. Esto puede mejorarse de elevando el grado del polinomio usado para representar las distorsiones, aunque una evaluación preliminar indica que deberían usarse polinomios de sexto grado, lo que trae aparejado una complejidad algebraica importante. Otra posibilidad, sería obtener la solución analítica de la ecuación diferencial del problema como se hizo en la referencia (Jouglard y Peker, 2019).

BIBLIOGRAFIA

Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. & Witt, R. J. (2001). Concepts and Applications of Finite Element Analysis (4th). John Wiley & Sons, Inc.

Filipich, C. P. & Bambill, E. A. (2003). Frecuencias Naturales De Piezas Empresilladas Via Series De Potencias. *Mecánica Computacional*, 22 (10), 877-891.

Filipich, C. P., Guzmán, A. M. & Rosales, M. B. (2010). Planteo Discreto-Continuo de Piezas Reticuladas Planas y Espaciales. *Mecánica Computacional*, 29 (9), 863-882.

Guzmán, A. M., Rosales, M. B. & Filipich, C. P. (2019). Continuous One-Dimensional Model of a Spatial Lattice. Deformation, Vibration and Buckling Problems. *Engineering Structures*, 182, 290-300.

Guzmán, A. M. (2014). *Estática, Estabilidad y Dinámica de Mástiles Reticulados con Aplicación a Estructuras Arriostradas* (Tesis de Doctorado). Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina.

Helou, M. & Kara, S. (2018). Design, analysis and manufacturing of lattice structures: an overview. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 31 (3), 243-261.

Jennings, A. (1977). *Matrix Computation for Engineers and Scientists*. John Wiley & Sons.

Jouglard, C. E. (2021). *Matriz de Rigidez de Una Viga Empresillada: Aproximación Axial Mejorada* (Reporte de Investigación GADE-RI-2021-01). Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.

Jouglard, C. E. (2020). *Matriz de Rigidez de Una Viga Empresillada: Aproximación*

Incluyendo Efectos de Corte (Reporte de Investigación GADE-RI-2020-01). Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.

Jougard, C. E. & Peker, U. (2019). Matriz de Rigidez de Una Viga Empresillada: Aproximación Flexional Global (Reporte de Investigación GADE-RI-2019-01). Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.

Martín, H. D. (2017). Utilización de Series de Potencias para la Resolución Económica de Elásticas, Frecuencias y Teoría de Segundo Orden de Entramados de Barras, en el Contexto de la Ingeniería Estructural. (Tesis de Doctorado). Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina.

Maurizi, M. J., Bambill, E. A. & Martín, H. D. (2004). Análisis Discreto de Columnas Celosía. *Mecánica Computacional*, 23 (5), 411-427.

Noor, A. K. (1988). Continuum Modeling for Repetitive Lattice Structures. *Applied Mechanics Reviews*, 41 (7), 285-296.

Rektorys, K. (1980). *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*. D. Ridel Publishing Company.

Wang, C. M., Reddy, J. N. & Lee, K. H. (2000). *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*. Elsevier.