

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE ENTRAMADOS UTILIZANDO TEORÍA DE TIMOSHENKO

Martín, Héctor^a; Peresón, Marcos^a; Soto, Walter^a; Aguirre, Ernesto^b

^aFacultad Regional Reconquista UTN. GRUDIM (Grupo de Diseño Mecánico),
mail: hmartin@comunidad.frrq.utn.edu.ar

^bUniversidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba - Centro de
Investigaciones en Ciencias de la Tierra - CONICET/UNC, mail: eaguirre@frc.utn.edu.ar

Palabras clave: Series de potencia, vibraciones de entramados, viga Timoshenko

RESUMEN

En el cálculo estructural de los entramados planos presentados aquí se tiene en cuenta la teoría que incluye el efecto de la inercia rotacional y de la deformación transversal por corte. Las hipótesis de la teoría que se utiliza en este trabajo fueron desarrolladas en la década de 1920 por Stephen Timoshenko, se trata de un modelo matemático que describe la vibración transversal de las vigas. Estas hipótesis se aplican en los casos en que la sección de la viga es suficientemente ancha, o si el material del que está hecha se deforma ante un esfuerzo cortante. El material del elemento cumple la ley de elasticidad de Hooke, es homogéneo, isotrópico y linealmente elástico. Se propone una solución al problema diferencial aplicando series de potencias enteras. Se muestran ejemplos resueltos con baja cantidad de incógnitas.

ABSTRACT

In the structural calculation of the flat frameworks presented here, the theory that includes the effect of rotational inertia and transverse deformation due to shear is taken into account. The hypotheses of the theory used in this work were developed in the 1920s by Stephen Timoshenko; it is a mathematical model that describes the transverse vibration of beams. These hypotheses are applied in cases where the section of the beam is sufficiently wide, or if the material from which it is made is deformable when sheared. The material of the element follows Hooke's law of elasticity, is homogeneous, isotropic, and linearly elastic. A solution to the differential problem is proposed by applying integer power series. Solved examples with a low number of unknowns are shown.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se realiza un análisis dinámico de entramados planos mediante una formulación que incluye los efectos de la inercia rotatoria y de la deformación transversal por corte¹. Como caso de estudio se considera un pórtico en el cual se determinan las frecuencias naturales de vibración. Las hipótesis de la teoría de vigas de Timoshenko^{2,3} resultan particularmente apropiadas cuando la sección de la viga es relativamente ancha o cuando el material presenta una apreciable deformabilidad al corte, situaciones en las cuales el efecto del esfuerzo cortante no puede ser despreciado. En contraste, la teoría clásica de vigas de Bernoulli–Euler⁴ supone que las deformaciones elásticas se deben exclusivamente a la flexión, ignorando tanto la inercia rotatoria como la deformación por corte. Esta aproximación resulta suficientemente precisa para numerosos problemas de ingeniería; sin embargo, en vigas de gran altura o en aquellos casos donde intervienen modos de vibración de orden elevado, dicha formulación puede conducir a errores apreciables. Con el objetivo de obtener soluciones analíticas más precisas en estas situaciones, se implementa la resolución de la ecuación de vibración mediante el método de series de potencias⁵. Esta técnica permite abordar ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, que surgen naturalmente al incorporar los efectos de la rigidez al corte y la inercia rotacional. A partir del desarrollo en serie se obtiene una expresión general para los modos de vibración, la cual puede truncarse con el número de términos necesario para alcanzar la precisión deseada. Esta metodología no solo proporciona una herramienta eficaz para la resolución del problema, sino que también permite analizar la influencia relativa de los distintos términos físicos involucrados en el modelo de Timoshenko. Asimismo, se presentan ejemplos numéricos en los cuales se analiza la influencia de distintos parámetros del modelo. En particular, se estudia el efecto de variar el grado de las series de potencias utilizadas en la aproximación de las funciones de desplazamiento⁶, así como el valor del coeficiente de corte asociado al modelo de Timoshenko. A partir de estas variaciones se evalúa su incidencia en la determinación de las primeras frecuencias naturales de vibración de un pórtico doblemente empotrado. Los resultados obtenidos permiten analizar tanto la convergencia del método propuesto como la sensibilidad del comportamiento dinámico del sistema frente a los efectos de deformación por corte⁷.

Hipótesis básicas y expresiones de energía de deformación

Se considera una viga de longitud a cuyo eje coincide con la dirección x . En el sistema de coordenadas adoptado, las funciones de desplazamiento del eje de la viga son $u(x)$ en la dirección axial x y $v(x)$ en la dirección transversal y . De acuerdo con la hipótesis de entramado plano y siguiendo las consideraciones de la teoría de De Saint-

Venant, los desplazamientos fuera del plano del pórtico, $w(x)$ en la dirección z , se consideran nulos. En consecuencia, el movimiento de las barras queda completamente definido dentro del plano del entramado. El modelo mecánico empleado se basa en la teoría de vigas de Timoshenko, desarrollada en la década de 1920 por Stephen Timoshenko. Esta formulación describe el comportamiento dinámico de las vigas considerando explícitamente los efectos de la deformación por corte y de la inercia rotatoria. Se supone que el material del elemento cumple la ley de elasticidad de Hooke, siendo homogéneo, isotrópico y linealmente elástico. Bajo estas hipótesis, las deformaciones axial y transversal de los puntos del eje de la viga dependen únicamente de la coordenada x . Los segmentos inicialmente normales al eje de la viga permanecen rectos después de la deformación, aunque no necesariamente perpendiculares al eje deformado. En general, estas secciones experimentan una rotación $\phi(x)$ asociada a la flexión, mientras que la diferencia entre la pendiente de la deformada dv/dx y dicha rotación define el ángulo de deformación por corte $\psi(x)$, como se indica esquemáticamente en la Figura 1.

De acuerdo con estas hipótesis cinemáticas, una sección recta situada a una distancia x del extremo izquierdo experimenta un desplazamiento transversal $v(x)$, común a todos los puntos de la sección, un desplazamiento axial $u(x, y)$ y una rotación $\phi(x)$.

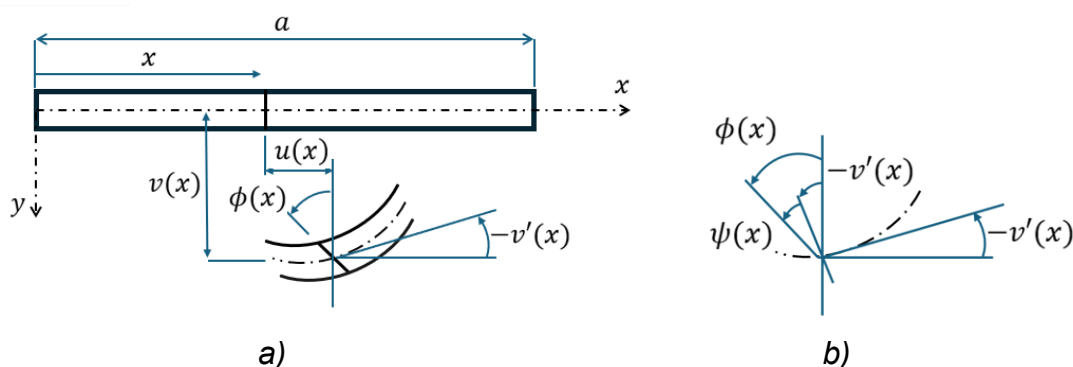


Figura 1. a) Esquema de la viga según la teoría de Timoshenko mostrando el sistema de coordenadas y los desplazamientos generalizados, b) diagrama de ángulos de giro de la sección transversal.

La expresión de la rotación viene dada por la (1):

$$\phi(x) = -v'(x) + \psi \rightarrow \psi = v'(x) + \phi(x) \quad (1)$$

De la Figura 1 b se deduce que el desplazamiento axial $u(x, y)$ de un punto genérico

de la sección recta, ubicado a una distancia “y” del baricentro, es igual a:

$$u(x, y) = u_0(x) + \phi(x) \cdot y \quad (2)$$

A los fines de realizar el estudio dinámico de un entramado general, en la Figura 2a) se muestra un pórtico plano cerrado, referido a un sistema de coordenadas de referencia X-Y. Se utiliza en el estudio la siguiente nomenclatura: nb es la cantidad total de barras; nn es el número total de nodos; j es el subíndice que denota la barra, ($j=1, 2, \dots, nb$); n es el subíndice que denota el nodo, ($n=1, 2, \dots, nn$).

La numeración de las barras y los nodos puede realizarse arbitrariamente, ver Figura 2a), ya que se ha diseñado un algoritmo que las reenumera convenientemente, para luego realizar un recorrido del pórtico a los fines de la resolución del mismo.

Las características de cada barra j , son las siguientes: E_j módulo de Young, G_j módulo transversal, χ_j coeficiente de corte, ρ_j densidad uniforme, F_j área, J_j momento de Inercia, $\alpha_{j,k}$ ángulo relativo entre la barra j y la barra k , a_j longitud, X-Y sistema de coordenadas globales, x_j coordenada local.

Para el estudio energético^{7,8} se considera en cada barra j un sistema de coordenadas local x_j en donde cada punto, al vibrar, tendrá un desplazamiento transversal $v_j(x_j)$ y un desplazamiento axial $u_j(x_j)$, como se muestra en la Figura 2 b). En el sistema local de coordenadas, considerando la variable x_j que recorre la barra j ($0 \leq x_j \leq a_j$), se considera $u_j(x_j) \geq 0$ si es en la misma dirección que x_j , $v_j(x_j) \geq 0$ si es hacia la derecha en un recorrido en la dirección x_j .

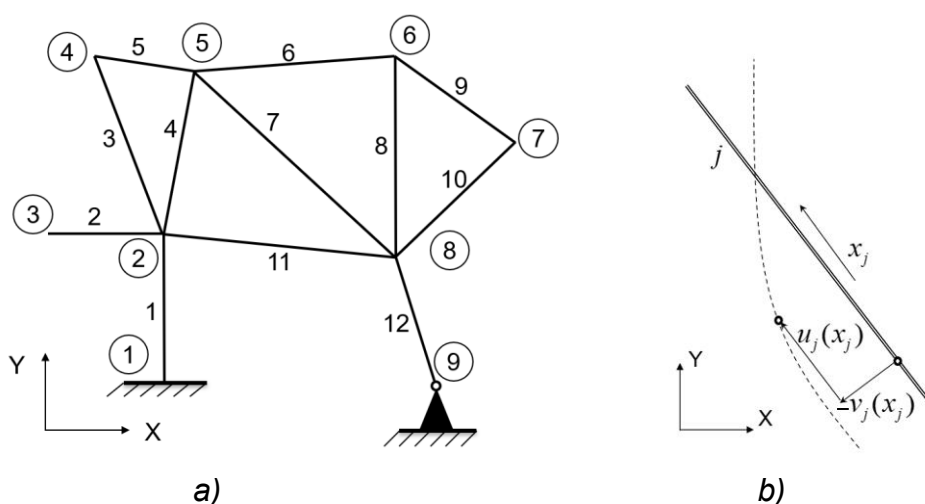


Figura 2: a) Esquema de un entramado con 9 nodos y 12 barras, b) desplazamientos y coordenadas locales de cada barra j .

Las energías de deformación U y las cinéticas K serán la suma de toda la energía para cada elemento de las funciones de desplazamiento de cada una de las barras j :

$$U = \sum_{j=1}^{nb} U_j \quad , \quad K = \sum_{j=1}^{nb} K_j \quad (3)$$

Definimos la energía potencial de deformación de la siguiente manera:

$$U_j = \frac{1}{2} \int_0^{a_j} E_j J_j \left(\phi_j'(x_j) \right)^2 dx_j + \frac{1}{2} \int_0^{a_j} \chi_j G_j F_j \left(v_j'(x_j) + \phi_j(x_j) \right)^2 dx_j + \frac{1}{2} \int_0^{a_j} E_j F_j \left(u_j'(x_j) \right)^2 dx_j \quad (4)$$

Se debe tener en cuenta la siguiente nomenclatura: $(\otimes)' = \frac{\partial(\otimes)}{\partial x}$

La energía cinética para cada barra j , aceptando modos normales de vibración, se expresa en función de ω (frecuencia circular de vibración de todo el pórtico), se define de la siguiente manera:

$$K_j = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\int_0^{a_j} \rho_j F_j \left(v_j(x_j) \right)^2 dx_j + \int_0^{a_j} \rho_j J_j \left(\phi_j(x_j) \right)^2 dx_j + \int_0^{a_j} \rho_j F_j \left(u_j(x_j) \right)^2 dx_j \right) \quad (5)$$

El segundo término de la expresión anterior es el que está vinculado a la teoría de Timoshenko. Aplicando a continuación el principio de Hamilton: $\delta(U - K) = 0$ con las ecuaciones (4) y (5), realizando las variaciones de cada término, luego las integraciones por parte de las expresiones. Finalmente, acomodando los términos que quedan dentro de las integrales, se obtienen las tres ecuaciones diferenciales:

$$E_j J_j \phi_j''(x_j) - \chi_j G_j F_j \left(v_j'(x_j) + \phi_j(x_j) \right) + \omega^2 \rho_j J_j \phi_j(x_j) = 0 \quad (6)$$

$$\chi_j G_j F_j \left(v_j''(x_j) + \phi_j'(x_j) \right) + \omega^2 \rho_j F_j v_j(x_j) = 0 \quad (7)$$

$$E_j F_j u_j''(x_j) + \omega^2 \rho_j F_j u_j(x_j) = 0 \quad (8)$$

Se efectúa el siguiente cambio de variables, a los fines de adimensionalizar las barras:
 $0 \leq x_j \leq a_j \rightarrow 0 \leq \frac{x_j}{a_j} \leq 1$ donde $\xi_j = \frac{x_j}{a_j}$ para lo cual, utilizando la regla de la cadena,
 las tres ecuaciones diferenciales se convertirán, en el nuevo sistema de coordenadas
 adimensionalizadas:

$$\frac{E_j J_j}{a_j^2} \phi_j''(\xi_j) - \chi_j G_j F_j \left(\frac{v_j'(\xi_j)}{a_j} + \phi_j(\xi_j) \right) + \omega^2 \rho_j J_j \phi_j(\xi_j) = 0 \quad (9)$$

$$\chi_j G_j F_j \left(\frac{v_j''(\xi_j)}{a_j^2} + \frac{\phi_j'(\xi_j)}{a_j} \right) + \omega^2 \rho_j F_j v_j(\xi_j) = 0 \quad (10)$$

$$E_j F_j \frac{u_j''(\xi_j)}{a_j^2} + \omega^2 \rho_j F_j u_j(\xi_j) = 0 \quad (11)$$

A continuación, se combinan las dos primeras ecuaciones de la siguiente manera: de
 la ecuación (9) obtenemos ϕ y luego se realizan sus correspondientes derivadas,
 finalmente se reemplazan en la (10), obteniéndose las expresiones (12) y (13):

$$v_j''''(\xi_j) + \Omega_j^2 (\beta_j^2 + \alpha_j^2) v_j''(\xi_j) + \Omega_j^2 (-1 + \Omega_j^2 \beta_j^2 \alpha_j^2) v_j(\xi_j) = 0 \quad (12)$$

$$u_j''(\xi_j) + \Omega_j^2 \alpha_j^2 u_j(\xi_j) = 0 \quad (13)$$

En la cual se han establecido las siguientes constantes:

$$\alpha_j^2 = \frac{J_j}{F_j a_j^2}; \quad \beta_j^2 = \frac{E_j J_j}{\chi_j G_j F_j a_j^2}; \quad \Omega_j^2 = \frac{\omega^2 \rho_j F_j a_j^4}{E_j J_j} \quad (14)$$

Se calcula ahora la rotación en función del desplazamiento, resultando:

$$\phi_j(\xi_j) = \frac{E_j J_j}{(-\chi_j G_j F_j + \omega^2 \rho_j J_j)} \frac{v_j'''(\xi_j)}{a_j^3} + \left(\frac{E_j J_j \omega^2 \rho_j F_j + (\chi_j G_j F_j)^2}{(-\chi_j G_j F_j + \omega^2 \rho_j J_j) \chi_j G_j F_j} \right) \frac{v_j'(\xi_j)}{a_j} \quad (15)$$

Realizando el cambio de variable propuesto, los esfuerzos quedan expresados de la

siguiente forma:

$$M_j(\xi_j) = E_j J_j \phi_j'(x_j) = E_j J_j \left(-\frac{v_j''(\xi_j)}{a_j^2} - \Omega_j^2 \beta_j^2 \frac{v_j(\xi_j)}{a_j^2} \right) \quad (16)$$

$$Q_j(\xi_j) = G_j F_j \left\{ \frac{\beta_j^2}{-1 + \Omega_j^2 \alpha_j^2 \beta_j^2} \frac{v_j'''(\xi_j)}{a_j} + \left(1 + \frac{1 + \beta_j^4 \Omega_j^2}{-1 + \beta_j^2 \Omega_j^2 \alpha_j^2} \right) \frac{v_j'(\xi_j)}{a_j} \right\} \quad (17)$$

$$N_j(\xi_j) = E_j F_j \frac{u_j'(\xi_j)}{a_j} \quad (18)$$

Desarrollo en series de potencias

Las ecuaciones diferenciales (12) y (13) se resuelven utilizando los desarrollos en series de potencias⁹ para las funciones de desplazamiento axial $u_j(\xi_j)$ y transversal $v_j(\xi_j)$, de cada barra j . Si la potencia de la serie m tiende a infinito, obtendríamos soluciones exactas:

$$v_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i \quad ; \quad u_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i \quad (19)$$

Al reemplazar (19) en las ecuaciones diferenciales con sus correspondientes derivadas, luego igualando potencias de igual grado, se llega a las condiciones de recurrencia:

$$A_{j,i+4} = \frac{-\Omega_j^2(-1 + \Omega_j^2 \beta_j^2 \alpha_j^2) A_{j,i} - \Omega_j^2(\beta_j^2 + \alpha_j^2) \psi_{2,i} A_{j,i+2}}{\psi_{4,i}} \quad (20)$$

$$B_{j,i+2} = -\frac{\Omega_j^2 \alpha_j^2 B_{j,i}}{\psi_{2,i}} \quad (21)$$

En las cuales $\psi_{k,i} = \frac{(i+k)!}{k!}$

Estas expresiones, (20-21) muestran que solo son necesarias 6 incógnitas por cada barra, los 4 primeros coeficientes del desplazamiento transversal y los dos del desplazamiento axial. A partir de acá, en cada nodo, se deben cumplir las condiciones de compatibilidad geométrica y de equilibrio. De esta manera, se vinculan los coeficientes de cada barra con la barra que le precede en el camino de recorrido del pórtico para su cálculo, haciendo que la cantidad de incógnitas sea siempre pequeña.

Ejemplo

A continuación, se muestra un pórtico de cuatro barras (figura 3) con las siguientes características geométricas: luz de 10 m y una altura de cumbrera de 5.88 m, sección rectangular de 0.5 m de ancho.

En el ejemplo se han elegido todas las barras de acero estructural con las siguientes características: densidad $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$, $G = 77.2 \text{ GPa}$.

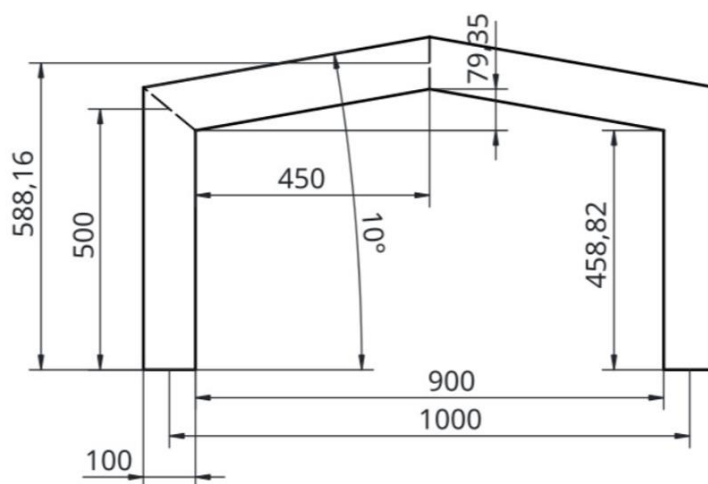


Figura 3. Modelo del pórtico en estudio

En la tabla 1 se puede apreciar la variación en los valores de las frecuencias naturales de vibración para diferentes valores del coeficiente de corte de todas las barras del pórtico doblemente empotrado. Los resultados se obtuvieron utilizando el programa de lenguaje simbólico Mathematica¹⁰ con desarrollos en series de potencias hasta el grado 30 en los desplazamientos axial y transversal de las barras.

ω	Valores del coeficiente de corte χ					
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.999
1	21.248	21.921	22.067	22.131	22.166	22.179
2	62.946	64.619	64.986	65.147	65.238	65.27
3	146.767	165.33	169.92	172.00	173.19	173.61
4	294.51	343.43	356.75	366.97	366.57	367.85
5	484.49	592.6	623.8	647.3	647.30	650.38

Tabla 1 – Se presentan las primeras 5 frecuencias naturales en rad/s al variar los valores del coeficiente de corte χ

En la figura 4 se pueden observar las tres primeras formas modales de vibración correspondientes a las primeras tres frecuencias naturales, se han obtenido utilizando el método de los elementos finitos¹¹ con el programa PrePoMax

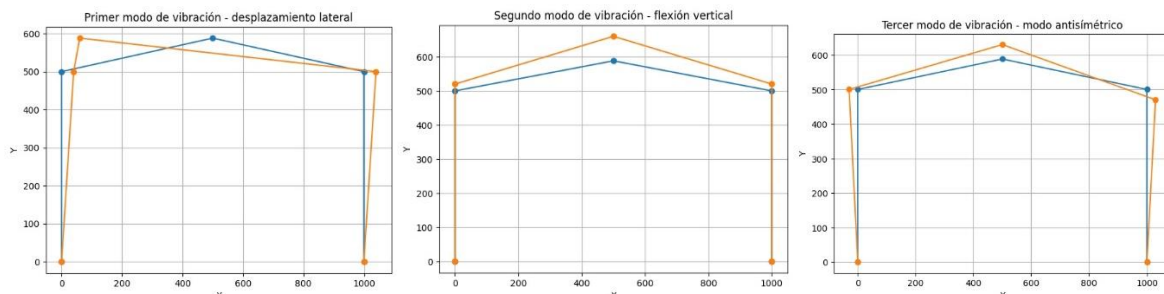


Figura 4. Formas modales de las primeras tres frecuencias naturales

En la tabla 2, se comparan las frecuencias obtenidas con CalculiX, y el cociente entre obtenido con la viga de Timoshenko y la obtenida con CalculiX.

ω	f_n Timoshenko	f_n CalculiX	Cociente
1	22.166	390.4228	17.6136
2	65.238	868.696	13.3158
3	173.19	1325.36	7.6526
4	366.57	1738.874	4.7436
5	647.30	22586.934	34.8941

Tabla 2 – Se comparan las frecuencias naturales en rad/s con respecto a los obtenidos con CalculiX con un coeficiente de corte χ equivalente de 0.85 aproximadamente

Comparación con elementos finitos 3D y evidencia de Shear Locking

Para establecer una comparación rigurosa entre el modelo analítico basado en la teoría de Timoshenko, resuelto mediante series de potencias, y una discretización computacional, se analizó el mismo entramado utilizando un modelo de elementos finitos tridimensionales lineales (CalculiX). Para mantener la fidelidad física del modelo de Timoshenko, se adoptaron los parámetros elásticos correspondientes a una sección transversal rectangular maciza de acero ($h=100$ [mm], $b=50$ [mm], $E=210000$ [MPa], $\nu = 0.30$). Bajo estas condiciones, y utilizando la formulación de Cowper para secciones rectangulares isótropas, se determinó un coeficiente de corte físico de $\kappa = 0.8497$, resultando en una rigidez efectiva al corte de $\kappa GA = 3.43 \times 10^8$ [N].

Al garantizar que ambos modelos comparten idéntica distribución de masa y condiciones de borde, cualquier divergencia en el espectro dinámico obedece exclusivamente a la formulación de la rigidez. Esto se realiza con el objetivo de demostrar que aparecer el fenómeno de bloqueo numérico. Los resultados revelan una discrepancia extrema entre ambos enfoques. Mientras que el desarrollo en series de potencias predice una primera frecuencia natural de vibración en el entorno de los 22 [rad/s], el modelo de elementos finitos lineales arroja un valor de 389.32 [rad/s]. Esta sobreestimación sistemática se repite en los modos superiores, donde las frecuencias del modelo 3D superan a las analíticas por factores de aproximadamente 17.55, 13.27 y 7.61 para los primeros modos. Esta rigidez espuria es una manifestación directa del fenómeno numérico conocido como shear locking (bloqueo por corte). En los elementos finitos lineales estándar, la interpolación independiente (y de bajo orden) de los campos de desplazamiento y rotación impide que el elemento logre representar un estado de flexión pura de forma exacta. Cinemáticamente, el elemento es incapaz de curvarse sin inducir deformaciones angulares por corte parásitas. En consecuencia, el modelo numérico absorbe gran parte del trabajo externo como energía de deformación por esfuerzo cortante artificial. Este exceso de energía incrementa drásticamente la rigidez global de las barras, disparando los autovalores y, por ende, las frecuencias naturales calculadas. La naturaleza puramente numérica de esta patología queda en evidencia al intentar buscar una equivalencia entre ambos métodos. Físicamente, el comportamiento al corte está gobernado por el coeficiente $\kappa \approx 0.85$. Si se intentara forzar el modelo analítico de Timoshenko para igualar las frecuencias sobrestimadas del modelo lineal 3D, se requeriría aplicar multiplicadores de autovalores irreales (del orden de 308, 176 y 58 para los primeros modos). Además, la fuerte dependencia de este error con respecto al modo de vibración demuestra que no existe un único coeficiente de corte equivalente (κ_{eq}) capaz de reconciliar ambos espectros. Queda expuesto, por lo tanto, que la profunda divergencia no se debe a un desajuste en los parámetros físicos del material, sino a la severa pérdida de flexibilidad introducida por el shear locking intrínseco de los elementos continuos lineales de bajo orden al modelar flexión.

Conclusiones

En este trabajo se ha presentado y validado una formulación analítica para el análisis dinámico de entramados planos empleando la teoría de vigas de Timoshenko mediante el método de desarrollos en series de potencias enteras. Esta metodología demostró ser una herramienta matemática altamente eficiente y rigurosa, permitiendo condensar la resolución cinemática de las estructuras a un número reducido de incógnitas fundamentales por barra (cuatro coeficientes para el desplazamiento

transversal y dos para el axial) gracias a la aplicación sistemática de las condiciones de compatibilidad geométrica y equilibrio en los nodos. Los criterios de convergencia se alcanzaron de forma óptima mediante la implementación del algoritmo en un entorno de cálculo simbólico. La contrastación de este enfoque analítico frente a un modelo numérico de elementos finitos tridimensionales continuos y lineales (CalculiX) permitió poner en evidencia, de manera explícita, la severa influencia de la patología numérica conocida como shear locking (bloqueo por corte). Al garantizar la paridad absoluta en la distribución de masa y las condiciones de contorno entre ambos modelos, las profundas discrepancias observadas en el espectro de frecuencias naturales —donde el modelo lineal 3D sobrestima la primera frecuencia en un orden de magnitud de 389.32 rad/s frente a los 22.17 rad/s del modelo analítico— responden estrictamente a una rigidez espuria de origen matemático. La formulación cinemática de bajo orden de los elementos continuos lineales tradicionales induce deformaciones angulares parásitas ante solicitaciones de flexión pura, absorbiendo artificialmente el trabajo externo como energía de corte numérico. La imposibilidad de reconciliar ambos espectros dinámicos mediante un único coeficiente de corte equivalente (κ_{eq}) —debido a que los factores de error varían drásticamente con cada modo de vibración— confirma de forma concluyente que la divergencia no constituye un desajuste en las propiedades físicas del material. Por el contrario, se demuestra que el uso inadvertido de elementos continuos lineales estándar sin técnicas de integración selectiva o formulaciones mejoradas introduce una pérdida crítica de flexibilidad que invalida la predicción del comportamiento dinámico en estructuras esbeltas o entramados sometidos a flexión. Se avanzará, en un trabajo futuro, a comparar el modelo de matemático de este trabajo, con los elementos de Timoshenko disponibles en paquetes comerciales tales como ABAQUS o FEMAP – NASTRAN.

Agradecimientos

Grupo de Diseño Mecánico de la Facultad Regional Reconquista de la Universidad Tecnológica Nacional

Referencias

- [1] De Rosa M. A., Lippiello M., Armenio G., Biase G. De and Savalli S., (2020) Dynamic analogy between Timoshenko and Euler-Bernoulli beams, *Acta Mechanica*, 231, 4819-4834.
- [2] Li X.F., (2008) A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams, *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5), 1210-1229.

[3] Saffari S., Hashemian M., Toghraie D., (2017) Dynamic stability of functionally graded nanobeam based on nonlocal Timoshenko theory considering surface effects, *Physica B: Condensed Matter*, 520, 97-105.

[4] Ghorbanpour Arani A., Niknejad Sh., (2020) Dynamic Stability Analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams Composed of Bi-Directional Functionally Graded Materials, *AUT J. Mech. Eng.*, 4(2), 201-214.

[5] Martín, H. D., Maggi, C., Piovan, M. T., De Rosa, M. A., & Gutbrod, N. M. (2022). "Natural vibrations and instability of plane frames: Exact analytical solutions using power series". *Applied Mathematical Modelling*, 107, 229–248.

[6] Martín, H. D., Maggi, C., Piovan, M. T., De Rosa, M. A., & Gutbrod, N. M. (2022). "Exact analytical calculation of natural frequencies and buckling loads of plane frames using power series". *Engineering Structures*, 262, 114349.

[7] Sebastián Fantini, Héctor Martín, María Anna De Rosa, Maria Lippiello y Ernesto Aguirre "Vibraciones en entramados planos, solución con series de potencias utilizando la viga de Timoshenko, análisis teórico" Encuentro conjunto de la real sociedad matemática española (RSME) y la unión matemática argentina (UMA). Instituto Balseiro, Bariloche, Argentina, del 1 al 5 de diciembre de 2025.

[8] M. Lippiello, M. A. De Rosa, C. Ceraldi, H. Martin, A. Onorato, M. T. Piovan "The influence of mass on dynamic response of cracked Timoshenko beam with restrained end conditions: the truncated theory". *Applied Mechanics*. Published: 7 February 2025, 6(1), 11.

[9] Héctor D. Martín, Maria Anna De Rosa, Marcos Peresón y Sebastián Fantini. "Método intuitivo para el cálculo de entramados planos con reducción en la cantidad de incógnitas". XVI Congreso iberoamericano de ingeniería mecánica - CIBIM 24. Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Concepción, Chile, del 22 al 24 de octubre 2024.

[10] Wolfram, S. (2010). *The Mathematica 8. Cambridge University Press*, Cambridge

[11] Luo, X., Xiao, C., Lv, H., & Feng, C. (2022). "Pseudo-dynamic analysis of steel-reinforced concrete plane frame structures using finite element methods". *Engineering with Computers*, 38(2), 987–1002.