

CONSIDERACIONES SOBRE LA DUCTILIDAD EN VIGAS CON ARMADURA MENOR A LA MÍNIMA

Liporace, Antonio G.^a; Tolosa, Anibal G.^b; Sarpero, Carlos J.^c

^aUniversidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Avellaneda,
aliporace@fra.utn.edu.ar

^bUniversidad Tecnológica Nacional – Facultades Regionales Avellaneda y Buenos Aires,
atolosa@frba.utn.edu.ar

^cUniversidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Avellaneda, ingsarpero@gmail.com

Palabras clave: vigas de hormigón armado, armadura mínima, ductilidad

RESUMEN

El empleo del artículo 9.6.1.3 del reglamento CIRSOC 201-2025, que permite no cumplir con los requisitos de armadura mínima si se dispone al menos un tercio más de la armadura requerida por cálculo, es de amplia aplicación en nuestro ámbito, en particular en el diseño de edificios de propiedad horizontal. Las vigas armadas de esta manera pueden carecer de la ductilidad necesaria para garantizar que se pueda desarrollar un mecanismo de falla dúctil que permita un aviso suficiente ante situaciones que exijan a la estructura por encima de su envolvente de diseño. El presente trabajo propone comparar las ductilidades que se alcanzan en vigas con armadura mínima frente a las alcanzables en aquellas diseñadas bajo el artículo 9.6.1.3. Para ello se analizará mediante simulaciones numéricas un conjunto de vigas con dimensiones y armaduras representativas de las empleadas en la práctica usual. La comparación permitirá determinar la influencia del empleo de este artículo en el diseño de vigas de hormigón armado, en particular, sobre la ductilidad. Esto permitirá ponderar el impacto que el empleo de dicho artículo tiene en el desempeño global de la pieza, en particular, respecto del aviso que se prevé presente la estructura frente a una situación de carga anómala.

|

ABSTRACT

The application of Article 9.6.1.3 of the CIRSOC 201-2025 code—which permits bypassing minimum reinforcement requirements provided that at least one-third more than the calculated reinforcement is supplied—is a widespread practice. However, beams designed under this provision may lack the ductility necessary to ensure a ductile failure mechanism, potentially failing to provide adequate warning when structural demands exceed the design envelope. This paper compares the ductility levels achieved in beams with minimum reinforcement versus those designed according to this article. Through numerical simulations the study assesses the impact of this provision on sectional ductility and the overall performance of these beams, specifically regarding their behavior under anomalous loading conditions.

INTRODUCCIÓN

En elementos de hormigón armado la armadura mínima desempeña un rol preponderante al garantizar que, cuando la sección cambia su mecanismo para equilibrar las acciones externas, el momento continúa creciendo para curvaturas crecientes. Esto previene la falla frágil que sobrevendría si, alcanzado el momento de fisuración, la pieza es incapaz de generar un par interno superior a este último.

Si bien el reglamento especifica armaduras mínimas mediante fórmulas desarrollada en base a hipótesis conservadoras, provee al diseñador de la potestad de disponer una armadura inferior siempre que ésta supere en al menos un 33% a la armadura estrictamente necesaria por cálculo.

En los siguientes párrafos analizaremos las consecuencias del empleo de este artículo y en qué modo se reducen, fundamentalmente, las posibilidades de detectar con suficiente antelación fallas en vigas de hormigón armado cuando se verifican situaciones de carga no previstas en el diseño.

RELACIÓN ENTRE LA FLECHA Y LA CURVATURA

En el análisis elástico de vigas, la flecha y la curvatura guardan una relación estrecha. Es un hecho verificado experimentalmente que en vigas de hormigón armado la distribución de deformaciones específicas varía linealmente en la altura de la sección; es decir, que las secciones planas antes de la deformación continúan siendo planas después de la deformación (Hipótesis de Bernoulli-Navier). Esto permite que el cálculo de la flecha instantánea se lleve adelante mediante métodos elásticos al menos hasta que se alcance el momento de fluencia (M_y). Luego se emplearán métodos plásticos para determinar la flecha correspondiente al momento último.

Para simplificar el análisis nos limitaremos a estudiar vigas simplemente apoyadas con cargas uniformemente distribuidas en toda su longitud. Aunque esta premisa limita un poco la generalidad de las conclusiones alcanzadas, presenta una complejidad manejable. Si lo obtenido del presente trabajo muestra potencial, un trabajo posterior puede desarrollar en una generalización más amplia.

Lo que se busca es determinar la deformación vertical en el centro del tramo de una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida si se conoce el valor de la curvatura en el centro del tramo (χ_c)

Para una viga de luz L , simplemente apoyada en sus extremos y sometida a una carga q , la ecuación de la línea elástica puede obtenerse al resolver la ecuación diferencial de cuarto orden:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad 1$$

Sometida a las siguientes condiciones de borde:

$$y(0) = y(L) = 0 \quad 2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(0) = \frac{d^2 y}{dx^2}(L) = 0 \quad 3$$

La solución a esta ecuación diferencial puede obtenerse por la técnica de *variables separables*. Integrando 4 veces:

$$y(x) = \frac{q x^4}{24 EI} + A \frac{x^3}{6} + B \frac{x^2}{2} + Cx + D \quad 4a$$

En donde A, B, C y D son constantes que pueden obtenerse a partir de las condiciones de borde. Para encontrar A y B, usamos las condiciones de borde (3); primero entonces derivamos dos veces:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x) = \frac{q x^2}{2 EI} + Ax + B$$

Luego:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(L) = \frac{q L^2}{2 EI} + AL = 0 \rightarrow A = -\frac{q L}{2 EI}$$

Reemplazando las anteriores en la (4a):

$$y(x) = \frac{q x^4}{24 EI} - \frac{q L x^3}{12 EI} + Cx + D$$

Podemos luego aplicar las condiciones de borde (2) para determinar C y D:

$$y(0) = 0 \rightarrow D = 0$$

$$y(L) = \frac{q L^4}{24 EI} - \frac{q L L^3}{12 EI} + CL = 0 \rightarrow C = \frac{q L^3}{24 EI}$$

Reemplazando y agrupando:

$$y(x) = \frac{q x}{24 EI} (x^3 - 2Lx^2 + L^3) \quad 4b$$

Por otra parte, si se conoce la curvatura en el centro del tramo (χ_c) podemos despejar el valor de la carga q como:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x) = \frac{q x^2}{2 EI} - \frac{q L}{2 EI} x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2 EI} - \frac{q L}{2 EI} \frac{L}{2} = \chi_c \rightarrow q = \frac{8EI \chi_c}{L^2} \quad 5$$

Reemplazando (5) en (4b):

$$y(x) = \frac{\chi_c}{6L} (x^3 - 2Lx^2 + L^3) \quad 6$$

Luego, la flecha en el centro del tramo conocida la curvatura en la misma sección resulta:

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{48} \chi_c L^2 \quad 7$$

Esta expresión pierde validez para regiones del diagrama Momento-Curvatura en que la armadura comienza a plastificarse. Para el análisis de esta región emplearemos la expresión propuesta por Park:

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \delta_y + (\chi - \chi_y) L_p \left(\frac{L}{2} - \frac{L_p}{2}\right) \quad 8$$

Para la determinación de la longitud de la rótula plástica se empleará también una expresión propuesta por Park:

$$L_p = 0.08 \frac{L}{2} + 0.022 f_y d_b$$

En donde d_b corresponde al diámetro de la barra de mayor diámetro empleada. Todas las longitudes se expresarán en mm y f_y en MPa.

La expresión (8) es, en rigor, sólo válida para la curvatura última. En el presente trabajo se aplicará, a modo de aproximación, desde la curvatura de fluencia (χ_y) hasta la curvatura última. Una consideración similar rige para la longitud de la rótula plástica que, para curvaturas menores a la última, es inferior a la calculada con la expresión propuesta. Estas aproximaciones se encuentran dentro de las usuales para este tipo de análisis y no modifican las conclusiones así obtenidas.

ARMADURA MÍNIMA EN VIGAS DE HORMIGÓN ARMADO

La principal función de la armadura mínima es la de garantizar que superado el momento de fisuración (M_{cr}), el momento nominal de la viga no decrezca para curvaturas crecientes.

Dado que la expresión de la armadura mínima tiene un rol preponderante en este trabajo, deduciremos las expresiones brindadas por el reglamento para justificar por qué hemos dividido el análisis en función de la calidad del hormigón y por qué resulta conveniente calcular también una armadura mínima teórica, en general, algo inferior a la requerida por el reglamento.

Para ello, partimos de igualar el momento de fisuración, cuando la sección se comporta como un material homogéneo, y el correspondiente a la curvatura inmediatamente posterior a la curvatura de fisuración. Buscaremos determinar qué armadura resulta necesario disponer para garantizar que, como mínimo, ambos momentos sean iguales. No debe confundirse aquí el factor de reducción de resistencia (ϕ) con la curvatura de la viga.

$$\begin{aligned} \phi M_n &\geq M_{cr} \\ \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) &\geq \frac{f_r I_g}{y_t} \\ \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) &\geq \frac{0.625 \sqrt{f'_c} \frac{b_w h^3}{12}}{\frac{h}{2}} \\ A_s &\geq \frac{0.625 \sqrt{f'_c} \frac{b_w h^2}{6}}{\phi f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)} \end{aligned}$$

Considerando:

$$\left(d - \frac{a}{2}\right) = 0.9d$$

$$\phi = 0.9$$

Tenemos:

$$A_{s,min,teor} \geq \frac{0.129\sqrt{f'_c}\left(\frac{h}{d}\right)^2}{f_y} b_w d \quad 9$$

La ecuación (9) permite calcular en función de la calidad de los materiales y la geometría de la sección, la mínima cantidad de armadura necesaria para garantizar que el diagrama Momento-Curvatura no tenga pendiente negativa luego de alcanzado el momento de fisuración.

El reglamento CIRSOC 201 realiza una simplificación más en la ecuación (9). Analizando el rango de variación del cociente $\left(\frac{h}{d}\right)$ para las vigas que usualmente se presentan en la práctica:

$$\text{Para: } \frac{h}{d} = 1.05 \rightarrow A_s \geq \frac{1}{7.05} \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d$$

$$\text{Para: } \frac{h}{d} = 1.20 \rightarrow A_s \geq \frac{1}{5.40} \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d$$

Finalmente, el reglamento adopta de manera conservadora la siguiente expresión:

$$A_{s,min1} \geq \frac{1}{4} \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \quad 10$$

Asimismo, el reglamento exige que la armadura mínima no sea inferior a:

$$A_{s,min2} \geq \frac{1.4}{f_y} b_w d \quad 11$$

La ecuación (11) gobierna para calidades del hormigón $f'_c \leq 31.4 \text{ MPa}$.

Hasta mediados del siglo XX el acero para armadura empleado en el mundo era de

bajo contenido de carbono (*acero dulce*) designado en el reglamento ACI 318 como grado 40 ($f_y = 40000\text{psi} \approx 276\text{MPa}$). En el mismo período, la armadura mínima de flexión se especificaba fijando una cuantía geométrica mínima $\rho = 0.5\%$. Hacia finales de la década de 1950 comenzaron a emplearse aceros de mayor resistencia; éstos fueron incorporados al reglamento ACI 318 en la revisión de 1963. El comité redactor entendió que no era razonable mantener el mismo valor de cuantía geométrica si el nuevo acero presentaba tensiones de fluencia superiores. De este modo, la cuantía mínima requerida se modificó a:

$$\rho = \frac{200}{f_y[\text{psi}]} = \frac{1.4}{f_y[\text{MPa}]} = \frac{A_{s,\text{mín2}}}{b_w d}$$

Nótese que esta ecuación nos lleva a la cuantía histórica del 0.5% para $f_y = 40000\text{psi} \approx 276\text{MPa}$. Esto lleva a disponer aproximadamente $40 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ de armadura longitudinal en el caso del acero $f_y = 276\text{MPa}$ y unos $25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ para acero $f_y = 420\text{MPa}$.

De las expresiones previas se ve que hay una necesidad de dividir el análisis formal en dos grupos en función de la calidad del hormigón.

Dado que la diferencia de armadura entre la mínima teórica (9) y las mínimas correspondientes al reglamento ((10) y (11)) puede llegar a ser relevante, se calcularán todas ellas al momento de analizar las secciones.

EL ESPÍRITU DEL ARTÍCULO 9.6.1.3

El artículo 9.6.1.3 se introdujo durante la revisión del año 1971 del código ACI 318. El espíritu de esta introducción fue el de dotar al diseñador con una herramienta para lograr diseños económicos de elementos que, por tener que cumplir fines arquitectónicos, requerían dimensiones muy superiores a las mínimas necesarias para cumplir con los requerimientos resistentes. En la actualidad, este artículo sigue cumpliendo esta función, pero también se aplica de manera general a elementos que forman parte de la estructura principal de las construcciones.

Aunque no fue posible encontrar información de primera fuente, el requerimiento de incrementar la armadura en un 33% por encima de la estrictamente necesaria por cálculo puede justificarse a partir de un análisis de los factores de reducción de resistencia para las situaciones de máxima y mínima ductilidad:

$$\frac{\phi_{\text{flexión}}}{\phi_{\text{compresión}}} = \frac{0.90}{0.65} = 1.39 \approx \frac{4}{3}$$

Pensando que el momento nominal de una viga varía casi linealmente con la cantidad de armadura dispuesta, un incremento del 33% de la armadura (que

incrementaría también el M_n en la misma magnitud) puede considerarse adecuado desde un punto de vista resistente.

EVALUACIÓN DE MOMENTOS, CURVATURAS Y FLECHAS

Para la evaluación de los momentos, curvaturas y flechas se ha empleado un software propio desarrollado específicamente para el presente trabajo. El mismo ha sido generado en Python y se encuentra disponible a solicitud de cualquier interesado en reproducir las tablas provistas, así como en ampliar y profundizar lo abordado en el presente trabajo.

El programa toma como datos de entrada la geometría de la sección, la sección de armadura, la luz, la tensión característica de compresión del hormigón y la tensión de fluencia del acero. El objetivo del análisis es determinar en la sección central de una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida el momento nominal, la curvatura y la flecha. Estas tres magnitudes se determinan para tres situaciones: el momento de aparición de la primera fisura, para la fluencia de la armadura y para la situación en que se alcanzan las deformaciones específicas últimas establecidas por el reglamento. La situación de aparición de la primera fisura se analiza con la teoría clásica de la resistencia de materiales. La condición de fluencia de la armadura y el estado último se analizan barriendo los distintos planos de deformación y calculando, para cada uno, la posición del eje neutro que garantiza el equilibrio entre la resultante traccionada y la comprimida. Para mejorar el modelado de la resultante comprimida se ha empleado la curva tensión-deformación del hormigón propuesta por Hognestad; las tensiones así calculadas se integran numéricamente mediante el método de la *Cuadratura de Gauss-Kronrod adaptativa* para calcular tanto la resultante como su posición.

Dado que se trata de un desarrollo propio y que, como se ha mencionado, se han recurrido a simplificaciones a fin de mantener el esfuerzo de desarrollo en niveles razonables, se utilizó el marco de desarrollo de software *OpenSees* para verificar casos seleccionados. Éste último ha sido desarrollado por la Universidad de Berkeley y, aunque fue concebido para el análisis de construcciones sismorresistentes, sus capacidades para evaluar la respuesta elastoplástica de una pieza de hormigón armado lo hacen particularmente adecuado para comparar los resultados obtenidos con el software propio para casos seleccionados.

A fin de cubrir un marco amplio de situaciones que se encuentran en la práctica habitual se han evaluado los siguientes parámetros:

- f'_c : 30MPa, 35MPa
- f_y : 420Mpa
- L : 3000mm, 4000mm, 5000mm, 6000mm
- Secciones rectangulares: 200mm x 300mm, 200mm x 500mm, 200mm x 1000mm
- A_s : $A_{s,min}$, $\frac{A_{s,min}}{1.33}$, $A_{s,min,teor}$
- r = 30mm

Se analizaron dos calidades de hormigón ya que la menor conduce a la armadura mínima histórica requerida por el reglamento (y que es independiente de la calidad del hormigón) y la segunda, fija la armadura mínima en función de lograr un momento último igual o superior al momento de fisuración.

Se han analizado las 4 luces más comunes que suelen encontrarse en la práctica, en particular, en el diseño de edificios de vivienda multifamiliar.

Las secciones se han elegido para analizar elementos con altura total del orden de un décimo de la luz. La sección de mayor altura se eligió para mostrar un fenómeno hallado que muestra la inconveniencia de proyectar piezas de altura grande cubriendo luces pequeñas.

Respecto de las armaduras se han analizado tres casos:

1. Armadura mínima reglamentaria
2. La anterior dividida por el factor 1.33. Esta armadura sería la eventual armadura de cálculo más pequeña en la que el empleo del artículo 9.6.1.3 resulta de interés práctico; armaduras de cálculo mayores conducen a armaduras superiores a la mínima y, por tanto, tornan la aplicación de este artículo en irrelevante
3. Armadura mínima teórica, calculada con la (9), es decir, aquella que garantiza que, para las condiciones de altura y profundidad del eje neutro de nuestra viga, conduce a un momento de fisuración igual al momento último

Un resumen de los resultados obtenidos se incluye en el anexo.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El análisis de los resultados ha arrojado dos grandes grupos de conclusiones.

Si se compara la flecha en el centro del tramo correspondiente al momento de fisuración con las correspondientes al momento último (Tablas 1 y 2) se ve que las primeras son al menos un orden de magnitud menores a las segundas; nótese que el valor de las flechas últimas es más bien teórico ya que corresponden a una situación de muy baja armadura, y se proveen a sólo efecto de permitir la comparación. Esto muestra que si, por aplicación de este artículo el momento último de la pieza coincide con el momento de fisuración, aun cuando la seguridad quede garantizada, se priva a los ocupantes de la construcción de la posibilidad de detectar situaciones de carga por fuera de las consideradas en el diseño, ya que no resulta posible apreciar a simple vista deformaciones tan pequeñas como las que conducen a la primera fisura. Asimismo, el valor absoluto de estas deformaciones también es pequeño, pudiendo ser éstas bien toleradas por elementos no estructurales, previniendo también la aparición de daños que pudieran indicar la presencia de cargas por fuera de las previstas en el diseño. Estas dos situaciones enfatizan la necesidad de revisar este artículo imponiendo condiciones que busquen garantizar que el momento de fisuración nunca será mayor que el momento último que es capaz de desarrollar la viga.

Sección	Luz [m]							
	6		5		4		3	
	y_{cr}	y_u	y_{cr}	y_u	y_{cr}	y_u	y_{cr}	y_u
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
0.20x1.00	1.0	120.1	0.7	88.8	0.4	61.9	0.2	39.5
0.20x0.50	2.0	232.8	1.4	172.1	0.9	120.0	0.5	76.5
0.20x0.30	3.3	374.5	2.3	276.7	1.5	192.8	0.8	122.9

Tabla 1 – Flechas en el centro del tramo, $f'c=30MPa$, $As=As_{min}$, teórica

Sección	Luz [m]							
	6		5		4		3	
	y_{cr}	y_u	y_{cr}	y_u	y_{cr}	y_u	y_{cr}	y_u
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
0.20x1.00	1.0	128.2	0.7	94.9	0.4	66.2	0.2	42.3
0.20x0.50	2.0	250.7	1.4	185.4	0.9	129.3	0.5	82.5
0.20x0.30	3.3	402.5	2.3	297.5	1.5	207.5	0.8	132.3

Tabla 2 – Flechas en el centro del tramo, $f'c=35MPa$, $As=As_{min}$, teórica

Por otra parte, se analiza la relación entre el momento último y el momento correspondiente a una flecha igual a $L/400$; ésta última puede considerarse la menor flecha detectable a simple vista. Esto permite ver el porcentaje en que el momento puede incrementarse desde aquel que produce la primera flecha apreciable a simple vista hasta que se alcanza el momento último. Se analizan tres configuraciones de armado: la correspondiente al caso 2 ($As_{min}/1.33$) (Tablas 3 y 4), la correspondiente al caso 1 (As_{min}) (Tablas 5 y 6) y la correspondiente al caso 3 ($As_{mín,teórica}$) (Tablas 7 y 8). Aquí se realizaron dos hallazgos de relevancia que se describen en los párrafos siguientes.

El primero muestra que en vigas de altura total igual o menor a $L/10$ (celdas grisadas, Tablas 5 y 6) y armadura mínima, la reserva de momento es de al menos 20%. Por otra parte, en vigas de geometría similar, pero armadura representativa de la aplicación del artículo 9.6.1.3 (caso 2) ésta reserva cae a un mínimo de 12% (celdas grisadas, Tabla 3 y 4). Finalmente, para armaduras que llevan a momentos últimos similares a los de fisuración (caso 3), la reserva se reduce al 11% pero abarca una mayor cantidad de situaciones (celdas grisadas, Tablas 7 y 8). De aquí se observa que la disposición de armaduras por debajo de la mínima reglamentaria, aun cuando en general garantiza que la pieza pueda desarrollar un momento último superior al de fisuración, conduce, en múltiples situaciones a una reserva de momento un 10% inferior a la que podría alcanzarse disponiendo la armadura mínima reglamentaria.

En segundo lugar, se ha observado que cuando se proyectan vigas con altura superior a $L/10$, aun cuando se emplea la armadura mínima reglamentaria, la reserva de momento es particularmente baja e inferior al 3%. Esto es de particular interés ya que el reglamento no fija un límite superior para la altura total de las vigas.

Sección	Luz [m]											
	6			5			4			3		
	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.
0.20x1.00	194.3	190.8	1.02	194.3	191.6	1.01	194.3	192.2	1.01	194.3	192.8	1.01
0.20x0.50	45.7	32.0	1.43	45.7	38.7	1.18	45.7	43.0	1.06	45.7	43.6	1.05
0.20x0.30	15.0	6.4	2.34	15.0	7.4	2.03	15.0	9.4	1.60	15.0	12.6	1.19

Tabla 3 – Momentos en el centro del tramo, $f'c=30MPa$, $A_s= A_{smin}/1.33$

Sección	Luz [m]											
	6			5			4			3		
	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.
0.20x1.00	205.8	202.2	1.02	205.8	202.9	1.01	205.8	203.6	1.01	205.8	204.3	1.01
0.20x0.50	48.3	35.0	1.38	48.3	43.0	1.12	48.3	47.0	1.03	48.3	47.0	1.03
0.20x0.30	15.9	6.8	2.34	15.9	8.3	1.92	15.9	10.1	1.57	15.9	13.4	1.19

Tabla 4 – Momentos en el centro del tramo, $f'c=35MPa$, $A_s= A_{smin}/1.33$

Sección	Luz [m]											
	6			5			4			3		
	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.
0.20x1.00	257.0	252.1	1.02	257.0	253.4	1.01	257.0	254.4	1.01	257.0	255.3	1.01
0.20x0.50	60.2	41.9	1.44	60.2	50.6	1.19	60.2	58.0	1.04	60.2	58.8	1.02
0.20x0.30	19.9	8.0	2.49	19.9	9.8	2.02	19.9	12.0	1.65	19.9	16.0	1.24

Tabla 5 – Momentos en el centro del tramo, $f'c=30MPa$, $A_s= A_{smin}$

Sección	Luz [m]											
	6			5			4			3		
	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.
0.20x1.00	271.9	266.9	1.02	271.9	268.2	1.01	271.9	269.2	1.01	271.9	270.1	1.01
0.20x0.50	63.9	46.0	1.39	63.9	54.0	1.18	63.9	62.0	1.03	63.9	62.0	1.03
0.20x0.30	21.1	8.5	2.47	21.1	10.2	2.07	21.1	13.1	1.61	21.1	17.1	1.23

Tabla 6 – Momentos en el centro del tramo, $f'c=35MPa$, $A_s= A_{smin}$

Sección	Luz [m]											
	6			5			4			3		
	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.
0.20x1.00	126.8	124.7	1.02	126.8	125.1	1.01	257.0	126.8	2.03	126.8	125.7	1.01
0.20x0.50	31.8	24.2	1.31	31.8	28.4	1.12	60.2	31.8	1.90	31.8	31.1	1.02
0.20x0.30	11.4	5.1	2.24	11.4	6.0	1.91	19.9	11.4	1.75	11.4	9.7	1.17

Tabla 7 – Momentos en el centro del tramo, $f'c=30MPa$, $A_s= A_{smin}$,teórica

Sección	Luz [m]											
	6			5			4			3		
	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.	Mn,u	Mn,L/400	Rel.
0.20x1.00	137.7	135.6	1.02	137.7	136.0	1.01	271.9	137.7	1.97	137.7	136.6	1.01
0.20x0.50	34.3	26.0	1.32	34.3	31.0	1.11	63.9	34.3	1.86	34.3	34.0	1.01
0.20x0.30	12.3	5.4	2.27	12.3	6.4	1.92	21.1	12.3	1.71	12.3	10.7	1.15

Tabla 8 – Momentos en el centro del tramo, $f'c=35MPa$, $A_s= A_{smin}$,teórica

CONCLUSIONES

Se ha demostrado que el empleo del artículo 9.6.1.3 puede conducir al diseño de secciones que fallan con muy poco aviso. Aun cuando, en rigor, el índice de seguridad estructural de la pieza resulte adecuado.

La notable pérdida de ductilidad reduce drásticamente las deformaciones que experimenta la pieza antes de fallar y, por tanto, se reducen las probabilidades de que problemas de funcionamiento de la estructura sean detectados. Se compromete también la posibilidad de adoptar acciones inmediatas para evitar una falla (como materializar apuntalamientos) y la de adoptar acciones de remediación de más largo plazo que identifiquen el problema y lo solucionen (reparación y, eventualmente, refuerzo).

La desaparición de esta ventana de oportunidad constituye una pérdida fundamental e incrementa innecesariamente el riesgo tanto para los bienes como para las personas cuando este artículo se aplica a elementos no contemplados en su espíritu original.

Recomendamos por tanto evaluar la posibilidad de que el uso del artículo 9.6.1.3 se limite taxativamente a elementos cuya eventual falla no importe riesgos para bienes y personas. En la misma dirección, recomendamos evaluar la posibilidad de exigir verificaciones más estrictas del momento de fisuración y de la flecha instantánea que se espera pueda alcanzar la pieza antes de la falla.

Se ha detectado también que las vigas con una relación l/h pequeña (vigas relativamente altas para la luz que cubren) y con armadura cercana a la mínima, presentan flechas últimas más bien pequeñas y cercanas a las mínimas detectables a simple vista ($L/400$). Recomendamos profundizar esta dirección de estudio a fin de evaluar si resultara conveniente incluir prescripciones reglamentarias tendientes a limitar la altura máxima con la que puede proyectarse una viga para cubrir una luz dada. Este es un hallazgo relevante y cuya potencial trascendencia amerita un trabajo de investigación dedicado.

ANEXO – RESUMEN DE RESULTADOS

NOTAS

60: 1 As mínima reglamento
2 As min / 1.33
3 As min teórica
Tc: 35MPa

Caso	As	Mn.cr	Mn.y	Mn.u	Mn.L/400
[...]	[mm ²]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]
1	647	114	246	257	255
2	486	114	186	194	193
3	315	114	122	127	126

Case	ϕ_{cr}	ϕ_{γ}	ϕ_0	$\phi_{1/400}$	H_0
[-]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[-]
1	2.66E-04	2.73E-03	5.08E-02	8.06E-03	18.56
2	2.66E-04	2.64E-03	6.74E-02	8.02E-03	25.55
3	2.66E-04	2.62E-03	1.04E-01	8.06E-03	39.73

Caso	Y_E	Y_I	Y_o	Y_{400}	μ_s
[...]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[...]
1	0.2	2.6	20.1	7.6	7.85
2	0.2	2.5	26.2	7.5	10.58
3	0.2	2.5	39.5	7.6	16.12

Caso	As	Mn,cr	Mn,y	Mn,u	Mn,L/400
[--]	[mm ²]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]
1	313	29	58	60	59
2	236	29	44	46	44
3	163	29	31	32	31

Caso	ϕ_{cr} [1/m]	ϕ [1/m]	ϕ_{1400} [1/m]	μ [...]
1	5,32E-04	5,64E-03	8,04E-03	18,56
2	5,32E-04	5,43E-03	8,02E-03	25,55
3	5,32E-04	5,34E-03	8,12E-03	37,62

Caso	Y_G	Y_I	Y_G	$Y_{0.400}$	H_0
[...]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[...]
1	0.5	5.3	41.5	7.5	7.85
2	0.5	5.1	53.9	7.5	10.58
3	0.5	5.0	76.5	7.6	15.29

Caso	As	Mn.cr	Mn.y	Mn.u	Mn.L/400
[...]	[mm ²]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]
1	180	10	19	20	16
2	135	10	14	15	13
3	102	10	11	11	10

Case	ϕ_{cr} [1/m]	ϕ_{γ} [1/m]	ϕ_0 [1/m]	$\phi_{1/400}$ [1/m]	H_4 [m]
1	8.87E-04	9.90E-03	1.82E-01	8.12E-03	18.56
2	8.87E-04	9.49E-03	2.43E-01	8.20E-03	25.55
3	8.87E-03	9.47E-03	3.21E-01	8.12E-03	33.89

Caso	Y_E	Y_I	Y_o	Y_{400}	μ_0
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[...]
1	0.8	9.2	72.1	7.6	7.85
2	0.8	8.9	94.2	7.7	10.58
3	0.8	8.9	122.9	7.6	13.84

Caso	As [mm ²]	Mn.σ [kNm]	Mn.γ [kNm]	Mn.η [kNm]	Mn.L/400 [kNm]
1	647	114	246	257	254
2	486	114	186	194	192
3	315	114	122	127	125

Caso	ϕ_{cr}	ϕ_{γ}	ϕ_{θ}	ϕ_{U403}	H_{γ}
[...]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[...]
1	2.66E-04	2.73E-03	5.06E-02	6.01E-03	18.56
2	2.66E-04	2.64E-03	6.74E-02	6.07E-03	25.55
3	2.66E-04	2.69E-03	1.04E-01	6.01E-03	39.73

Caso	Y_{cr}	Y_p	Y_0	$Y_{L,0.05}$	H_0
[...]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[...]
1	0.4	4.5	31.8	10.0	9.99
2	0.4	4.4	41.2	10.1	9.37
3	0.4	4.4	61.9	10.0	14.21

Caso	As [mm ²]	Mn,cr [kNm]	Mn,y [kNm]	Mn,u [kNm]	Mn,1/400 [kNm]
1	313	29	58	60	58
2	236	29	44	46	43
3	163	29	31	32	31

Caso	ϕ_{cr} [1/m]	ϕ [1/m]	ϕ_u [1/m]	$\phi_{1,005}$ [1/m]	H_u [...]
1	5,32E-04	5,64E-03	1,05E-01	6,00E-03	19,56
2	5,32E-04	1,43E-03	1,43E-01	6,03E-03	25,55
3	5,32E-04	5,34E-03	2,01E-01	6,08E-03	37,62

Caso	Y_{cr}	Y_j	Y_0	$Y_{L/800}$	μ_0
[...]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[...]
1	0.9	9.4	66.6	10.0	6.99
2	0.9	9.0	84.8	10.1	9.37
3	0.9	8.9	120.0	10.1	13.49

Caso	As [mm ²]	Mn _{cr} [kNm]	Mn _y [kNm]	Mn _u [kNm]	Mn _{L/400} [kNm]
1	180	10	19	20	12
2	135	10	14	15	9
3	102	10	11	11	7

CASO	ϕ_{cr}	ϕ_y	ϕ_u	ϕ_{L003}	μ_H
[...]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[...]
1	8.87E-04	9.80E-03	1.82E-01	6.09E-03	18.56
2	8.87E-04	9.49E-03	2.43E-01	6.09E-03	25.55
3	8.87E-04	9.47E-03	3.21E-01	6.09E-03	33.89

Caso	Y_{cr}	Y_i	Y_o	Y_{L000}	H_0
[...]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[...]
1	1.5	16.3	114.1	10.2	6.99
2	1.5	15.8	148.2	10.1	9.37
3	1.5	15.8	192.8	10.3	12.21

Caso	As [mm]	Mn.cr [kNm]	Mn.y [kNm]	Mn.x [kNm]	Mn.400 [kNm]
1	647	114	246	257	253
2	486	114	188	194	192
3	315	114	122	127	125

Caso	ϕ_{cr}	ψ	ψ_u	$\phi_{L/400}$	μ
[—]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[—]
1	2,66E-04	2,73E-03	5,06E-02	4,84E-03	18,56
2	2,66E-04	2,64E-03	6,74E-02	4,84E-03	25,55
3	2,66E-04	2,62E-03	1,04E-01	4,85E-03	39,73

Caso	Y_{xz}	Y_i	Y_0	$Y_{L/200}$	μ_0
[--]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[--]
1	0.7	7.1	45.8	12.6	6.46
2	0.7	6.9	59.2	12.6	8.63
3	0.7	6.8	88.8	12.6	13.03

Caso	As [mm ²]	Mn.cr [kNm]	Mn.y [kNm]	Mn.u [kNm]	Mn.L/400 [kNm]
1	313	29	58	60	51
2	236	29	44	46	39
3	163	29	31	32	28

Caso	ϕ_{cr} [1/m]	ϕ_y [1/m]	$\phi_{1,000}$ [1/m]	H_u [...]
1	5,32E-04	5,64E-03	1,09E-01	4,88E-03
2	5,32E-04	5,43E-03	1,39E-01	4,82E-03
3	5,32E-04	5,34E-03	2,01E-01	4,85E-03

Caso	Y_{cr}	Y_j	Y_0	$Y_{L(00)}$	μ_0
[...]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[...]
1	1.4	14.7	94.7	12.7	6.46
2	1.4	14.1	122.0	12.6	8.63
3	1.4	13.9	172.1	12.6	12.38

Caso	As [mm ²]	Mn.cr [kNm]	Mn.y [kNm]	Mn.u [kNm]	Mn.L/400 [kNm]
1	180	10	19	20	10
2	135	10	14	15	7
3	102	10	11	11	6

Caso	ϕ_{cr}	ψ_y	ϕ_u	$\phi_{L/400}$	μ_y
[—]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[—]
1	8,87E-04	9,80E-03	1,82E-01	4,98E-03	28,55
2	8,87E-04	9,49E-03	2,23E-01	4,81E-03	25,56
3	8,87E-04	9,47E-03	3,21E-01	4,97E-03	33,89

Caso	Y_{cr} [mm]	Y_i [mm]	Y_o [mm]	$Y_{L(00)}$ [mm]	μ_0 [...]
1	2.3	25.5	164.8	13.0	6.46
2	2.3	24.7	213.3	12.5	8.63
3	2.3	24.7	276.7	13.0	11.22

Caso	As [mm]	Mn.cr [kNm]	Mn.y [kNm]	Mn.u [kNm]	Mn.L/400 [kNm]
1	647	114	246	257	252
2	486	114	186	194	191
3	315	114	122	127	125

Caso	ϕ_{ci}	ϕ_y	ϕ_u	$\phi_{L/600}$	μ_k
[—]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[—]
1	2,66E-04	2,73E-03	5,08E-02	4,01E-03	18,56
2	2,66E-04	2,64E-03	6,74E-02	4,02E-03	25,55
3	2,66E-04	2,62E-03	1,04E-01	4,06E-03	39,73

Caso	Y_{xz}	Y_y	Y_u	$Y_{1/100}$	μ_g
[--]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[--]
1	1.0	10.2	62.3	15.0	6.10
2	1.0	9.9	80.3	15.1	8.12
3	1.0	9.8	120.1	15.2	12.24

Caso	As [mm ²]	Mn.cr [kNm]	Mn.y [kNm]	Mn.u [kNm]	Mn.L/400 [kNm]
1	313	29	58	60	42
2	236	29	44	46	32
3	163	29	31	32	24

Caso	ϕ_{π} [m]	ϕ_{γ} [m]	ϕ_{θ} [m]	ϕ_{1000} [m]	μ_{θ} [...]
1	5,32E-04	5,64E-03	1,09E-01	4,03E-03	18,56
2	5,32E-04	5,43E-03	1,39E-01	4,10E-03	25,55
3	5,32E-04	5,34E-03	2,01E-01	4,13E-03	37,62

Caso	Y_{cr}	Y_f	Y_u	$Y_{1/100}$	μ_5
[...]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[...]
1	2,0	21,1	128,8	15,1	6,10
2	2,0	20,4	165,4	15,4	8,12
3	2,0	20,0	232,8	15,5	11,63

Caso	As [mm ²]	Mn.cr [kNm]	Mn.y [kNm]	Mn.u [kNm]	Mn.L/400 [kNm]
1	180	10	19	20	8
2	135	10	14	15	6
3	102	10	11	11	5

Caso	ϕ_{cr}	ϕ_y	ϕ_u	$\phi_{L/600}$	μ_y
[---]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[1/m]	[---]
1	8.97E-04	9.80E-03	1.82E-01	4.03E-03	18.56
2	8.97E-04	9.49E-03	2.43E-01	4.16E-03	25.55
3	8.97E-04	9.47E-03	3.21E-01	4.24E-03	33.89

Caso	Y_{xz}	Y_y	Y_u	$Y_{1,400}$	μ_0
[...]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[...]
1	3.3	36.8	224.0	15.1	6.10
2	3.3	35.6	289.2	15.6	8.12
3	3.3	35.5	374.5	15.9	10.54

Caution

so:
1 As mínima reglamento
2 As mín / 1.33
3 As mín teórica
f'c: 30MPa

RERENCIAS

- Hognestad, E., *A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members*, University of Illinois, 1951
- Park, R., & Paulay, T., *Reinforced concrete structures*, Wiley-Interscience, 1975
- Carpinteri, A., *Minimum reinforcement in concrete structures*, ESIS N° 24, Elsevier, 1999
- Seguirant, S., Brice, R., Khaleghi, B., *Making sense of minimum flexural reinforcement requirements for reinforced concrete members*, PCI Journal, 2010
- Ozbolt, J., Bruckner, M., *Minimum reinforcement requirement for RC beams*
- Freyermuth, C., Aalami, B., *Unified minimum flexural reinforcement requirements for reinforced and prestressed concrete members*, ACI Structural Journal, 1997
- Velasco Enríquez, L. I., Tapia Hernández, E., Hospitaler Pérez, A., Guerrero Bobadilla, H., Cagua Gómez, B. J., Pilatasig Caizaguano, J. E., Sámano Brito, O., & Guerrero García, S. G., *Introducción al cálculo sísmico con OpenSees en Python*, Recursos Educativos En Abierto EdUPV. <https://doi.org/10.4995/9788413960043edUPVOpenSees>. *OpenSees*, 2025
- *Command Language Manual*, OpenSees Wiki.berkeley.edu, . (s.f.)