

DEFORMADA DE UNA VIGA CELOSÍA TIPO VIERENDEEL CON CARGA TRANSVERSAL UNIFORME

(¹) Ing. Civil James, Darío y (²) Dr. Ing. Jouglard, Claudio

(¹)Departamento de Ingeniería. Universidad de La Matanza (UNLaM)

(²)Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional Buenos Aires. UTN.

(¹)dariogjames@gmail.com y (²)claudio.jouglard@frba.utn.edu.ar

Palabras clave: viga Vierendeel, modelo simplificado, cargas transversales

RESUMEN

Las vigas tipo Vierendeel se pueden considerar como un caso particular de las vigas en celosía y en este trabajo se analiza su comportamiento cuando se encuentra uniformemente cargada transversalmente. Estas vigas pueden estar compuestas por un gran número de barras y su verificación detallada implica una gran demanda computacional, especialmente si se analizan considerando la no linealidad geométrica.

Se presenta un modelo simplificado y parametrizado de la viga cuya respuesta se puede expresar analíticamente. La carga pueda ser aplicada, tanto en la parte superior como en la parte inferior pudiendo tener deformaciones diferentes en ambas partes. Se mostrarán resultados para diferentes combinaciones de cargas. El modelo lleva en cuenta la deformación por corte que para este tipo de vigas puede ser importante. Se harán comparaciones con soluciones detalladas de elementos finitos.

ABSTRACT

Vierendeel beams can be considered a special case of lattice beams, and this work analyzes their behavior under uniform transverse loading. These beams can be composed of a large number of elements, and their detailed verification involves significant computational demands, especially when considering geometric nonlinearity.

A simplified, parameterized model of the beam is presented, whose response can be expressed analytically. The load can be applied to either the top or the bottom, potentially resulting in different deformations in each part. Results for various load combinations will be shown. The model takes into account shear deformations, which can be significant for this type of beam. Comparisons will be made with detailed finite element solutions.

INTRODUCCIÓN

Las estructuras en celosía han demostrado ser una solución efectiva y ampliamente utilizada en el campo de las estructuras metálicas. Estas estructuras reticulares se caracterizan por su capacidad para cubrir grandes luces sin necesidad de apoyos intermedios, lo que las convierte en una opción atractiva para diversas aplicaciones. Por otro lado, su configuración modular y la posibilidad de prefabricación facilitan su instalación y reducen los tiempos de construcción.

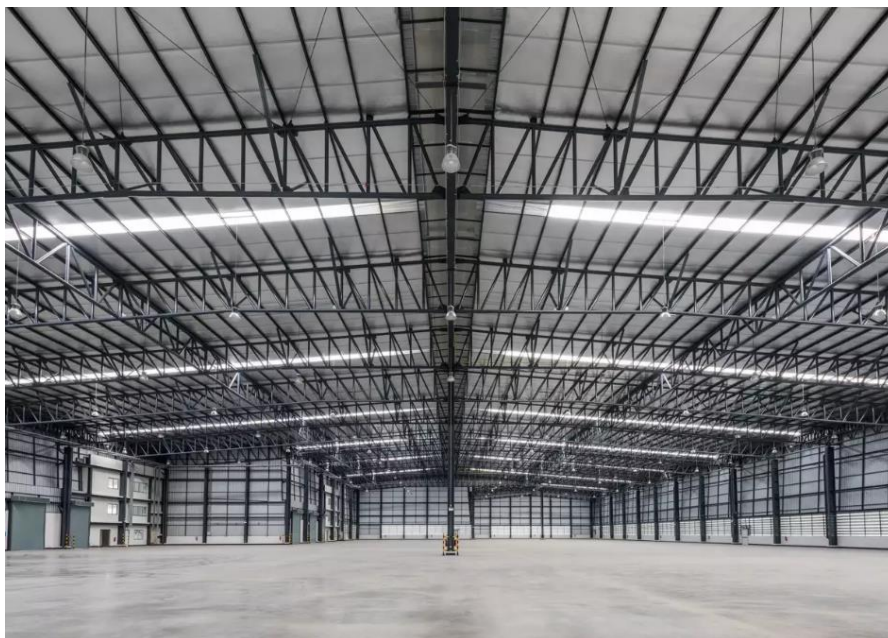


Figura 1. Estructura en celosía.

En la figura 2 se muestran algunas de las tipologías más usuales de vigas en celosía empleadas en la construcción de naves industriales, cubiertas y puentes. Entre ellas se encuentran las vigas Pratt, Howe y Warren. En particular, las vigas tipo Vierendeel pueden considerarse como un caso especial de vigas en celosía, caracterizadas por la ausencia de diagonales y por la presencia de uniones rígidas entre largueros y montantes.

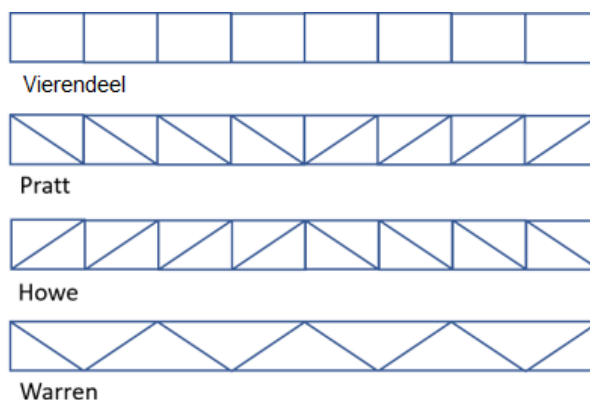


Figura 2. Modelos usuales de vigas en celosía.

El análisis estructural detallado de este tipo de vigas puede realizarse mediante un modelo discreto de elementos finitos, representando individualmente cada una de las barras que componen la estructura. Sin embargo, cuando el número de paneles es elevado, este procedimiento puede conducir a modelos con una gran cantidad de grados de libertad, incrementando el costo computacional del análisis, especialmente si se consideran efectos no lineales.

Existen distintos enfoques para el análisis de estructuras reticuladas repetitivas: el método directo, los métodos de campo discreto, los métodos de estructuras periódicas y la analogía del medio continuo.¹ En el método directo, la estructura se analiza modelando cada barra individualmente. En los métodos de campo discreto se aprovecha la regularidad geométrica de la estructura para formular ecuaciones de equilibrio o de energía en un nodo típico, que luego pueden aproximarse mediante ecuaciones diferenciales. Finalmente, mediante la analogía del medio continuo se reemplaza la estructura discreta por un modelo continuo equivalente.

En trabajos previos se desarrolló un modelo continuo equivalente para vigas empresilladas, a partir de funciones continuas que aproximan los desplazamientos y giros de los nodos de los largueros superior e inferior^{2,3,4,5,6}. Dicho modelo permite incorporar el efecto de la deformación por corte o distorsión, aspecto que puede resultar importante en vigas tipo Vierendeel debido a la flexibilidad relativa de los largueros y montantes.

En el presente trabajo se retoma dicho modelo y se lo aplica al estudio de una viga celosía tipo Vierendeel empotrada en ambos extremos, sometida a una carga transversal uniformemente distribuida aplicada sobre el larguero superior. A partir del desdoblamiento de las variables del problema, se obtienen expresiones analíticas para las deformadas de los largueros superior e inferior. Finalmente, las deformadas obtenidas mediante el modelo analítico se comparan con resultados provenientes de un modelo detallado de elementos finitos.

DEFINICIÓN DEL MODELO

Consideremos una viga celosía tipo Vierendeel compuesta por dos barras longitudinales, denominadas largueros, de longitud L , vinculadas mediante montantes verticales de altura h , separadas uniformemente una distancia d . Se considera que los dos largueros son iguales y poseen área A_l , inercia J_l y módulo de elasticidad E_l . Los montantes poseen área A_p , inercia J_p y módulo de elasticidad E_p .

Se define un sistema de coordenadas local x, y , con origen a mitad de la altura de la viga y sobre el borde izquierdo. El eje x coincide con la dirección longitudinal de la viga, mientras que el eje y se adopta en la dirección transversal. Las uniones internas entre largueros y montantes se consideran rígidas, de modo que durante la deformación un nodo k de la viga experimenta dos traslaciones, u_k y v_k , según las direcciones x e y , respectivamente, y una rotación θ_k en el plano.

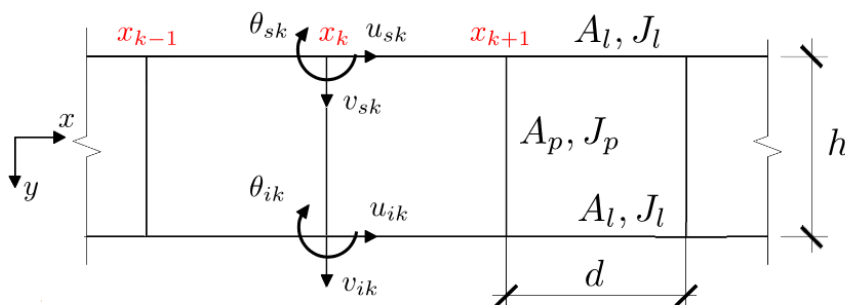


Figura 3. Sector de viga tipo Vierendeel.

Se denominarán u_{sk} , v_{sk} , θ_{sk} a los desplazamientos y giro nodales del nodo k perteneciente al larguero superior, y u_{ik} , v_{ik} , θ_{ik} a los desplazamientos y giro nodales del nodo correspondiente del larguero inferior. Si se conocieran todos los desplazamientos nodales, sería posible obtener el estado de deformaciones y esfuerzos internos de cada barra de la viga. Para evitar el tratamiento discreto completo, se asume que los desplazamientos y giros de los nodos pueden aproximarse mediante funciones $u_s(x)$, $v_s(x)$, $\theta_s(x)$ para el larguero superior y $u_i(x)$, $v_i(x)$, $\theta_i(x)$ para el larguero inferior, siendo todas funciones continuas de la coordenada longitudinal x .

De esta manera, los desplazamientos nodales se aproximan evaluando dichas funciones en la posición x_k del nodo considerado.

$$\begin{aligned} u_{sk} &\approx u_s(x_k) & u_{ik} &\approx u_i(x_k) \\ v_{sk} &\approx v_s(x_k) & v_{ik} &\approx v_i(x_k) \\ \theta_{sk} &\approx \theta_s(x_k) & \theta_{ik} &\approx \theta_i(x_k) \end{aligned} \quad (1)$$

Esta hipótesis permite reemplazar el modelo discreto de la viga por un modelo continuo equivalente, conservando la información necesaria para recuperar posteriormente los desplazamientos nodales y los esfuerzos internos de cada barra.

DISTORSIÓN POR CORTE

Si los largueros son suficientemente flexibles, puede producirse un efecto de deformación por distorsión, como se muestra esquemáticamente en la figura 4. Este efecto es equivalente a la deformación por corte en una viga maciza y se manifiesta mediante la aparición de una rotación adicional asociada a la distorsión del panel.

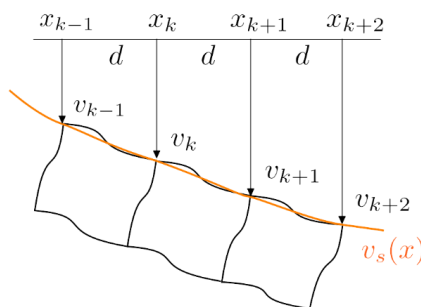


Figura 4. Efecto de distorsión.

Al analizar el giro en un nodo deformado del larguero superior pueden distinguirse tres ángulos: el giro efectivo del nodo θ_s , el giro asociado a la flexión ϕ_s , y el giro por distorsión o corte ψ_s .

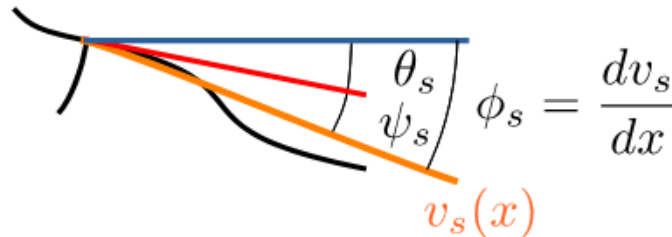


Figura 5. Giros por flexión y corte.

El giro por flexión se define como el ángulo entre la horizontal y la tangente a la curva de desplazamientos transversales $v_s(x)$. Para desplazamientos pequeños, este ángulo puede aproximarse mediante

$$\phi_s = \frac{dv_s}{dx} \quad (2)$$

El giro por distorsión se obtiene como la diferencia entre el giro por flexión y el giro efectivo del nodo:

$$\psi_s = \frac{dv_s}{dx} - \theta_s \quad (3)$$

De manera análoga, para el larguero inferior se define

$$\psi_i = \frac{dv_i}{dx} - \theta_i \quad (4)$$

Debe observarse que las funciones $v_s(x)$ y $v_i(x)$ representan los desplazamientos transversales de los nodos de los largueros superior e inferior, respectivamente. Por lo tanto, el modelo no describe solamente la deformación de una barra aislada, sino la deformación nodal equivalente de la viga tipo Vierendeel.

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

La energía de deformación de la viga celosía tipo Vierendeel se obtiene como la suma de las energías correspondientes a sus partes deformables. Por lo tanto, la energía total U estará compuesta por la energía de deformación de los largueros U_l y la energía de deformación de los montantes U_p :

$$U = U_l + U_p \quad (5)$$

donde estas energías se obtendrán sumando las energías de deformación de cada barra y asumiremos que cada barra es esbelta, esto es, se pueden despreciar las deformaciones por corte en cada barra, y además consideraremos todas las uniones rígidas.

Las energías de deformación de cada barra se calculan a partir de la matriz de rigidez individual de una barra de pórtico plano, considerando los desplazamientos relativos entre sus extremos⁷. Esto fue desarrollado en referencias previas y transcribiremos aquí los resultados finales de las energías de deformación.

Para los montantes su energía de deformación se puede aproximar como

$$U_p = \int_0^L \left[\frac{E_p A_p}{2dh} (v_2)^2 + \frac{3E_p J_p}{2dh^3} (2u_2 - \theta_1 h)^2 + \frac{E_p J_p}{2dh} (\theta_2)^2 \right] dx \quad (6)$$

Para los largueros su energía de deformación se puede aproximar como

$$U_l = \int_0^L \left[\frac{E_l A_l}{4} ((u'_1)^2 + (u'_2)^2) + \frac{E_l J_l}{4} ((v''_1)^2 + (v''_2)^2) + \frac{3E_l J_l}{d^2} ((\psi_1)^2 + (\psi_2)^2) \right] dx \quad (7)$$

siendo

$$\begin{aligned} u_1 &= u_s + u_i & u_2 &= u_s - u_i \\ v_1 &= v_s + v_i & v_2 &= v_s - v_i \\ \psi_1 &= \psi_s + \psi_i & \psi_2 &= \psi_s - \psi_i \end{aligned} \quad (8)$$

Este cambio de variables permitirá desdoblar el problema en dos conjuntos de ecuaciones diferenciales acopladas de menor tamaño.

ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MODELO EQUIVALENTE

Para obtener las ecuaciones diferenciales del modelo equivalente se plantea la minimización de la energía potencial total del sistema. Los detalles se pueden encontrar en la referencia 8.

Del cálculo variacional resulta, para el primer bloque de variables u_2 , v_1 y ψ_1 , el siguiente sistema diferencial:

$$u_2'' + \alpha_2 \psi_1 = -\frac{p_2}{E_l A_l} \quad (9)$$

$$v_1^{(4)} - \frac{12}{d^2} \psi_1' = \frac{q_1}{E_l J_l} \quad (10)$$

$$\psi_1 - \alpha_1 (h v_1' - 2u_2) = 0 \quad (11)$$

Para el segundo bloque de variables v_2 y ψ_2 se obtiene

$$\psi_2 - \alpha_5 v_2' = 0 \quad (12)$$

$$v_2^{(4)} - \alpha_3 (v_2'' - \psi_2') + \alpha_4 v_2 = \frac{q_2}{E_l J_l} \quad (13)$$

Las constantes que intervienen en estas ecuaciones son

$$\alpha_1 = \frac{E_p J_p d}{E_p J_p h d + 2E_l J_l h^2}, \quad \alpha_2 = \frac{24J_l}{A_l d^2 h} \quad (14)$$

$$\alpha_3 = \frac{2E_p J_p}{E_l J_l d h}, \quad \alpha_4 = \frac{2E_p A_p}{E_l J_l d h}, \quad \alpha_5 = \frac{E_p J_p d}{E_p J_p d + 6E_l J_l h} \quad (15)$$

Las cargas transversales aplicadas sobre los largueros superior e inferior se denotan como q_s y q_i , respectivamente. En términos de las variables desdobladas, se definen las combinaciones

$$q_1 = q_s + q_i, \quad q_2 = q_s - q_i \quad (16)$$

En el presente trabajo se estudia una viga empotrada en ambos extremos con una única carga transversal uniformemente distribuida aplicada sobre el larguero superior. Por lo tanto,

$$q_s = q, \quad q_i = 0, \quad q_1 = q, \quad q_2 = q \quad (17)$$

De esta manera, una carga aplicada sólo en el larguero superior excita simultáneamente el bloque común u_2, v_1, ψ_1 y el bloque diferencial v_2, ψ_2 .

CONDICIONES DE BORDE

Al considerarse que la viga se encuentra empotrada en ambos extremos, los desplazamientos transversales y las pendientes de los largueros se anulan en $x = 0$ y en $x = L$. En términos de las variables combinadas, para el primer bloque diferencial se imponen las condiciones

$$v_1(0) = 0, \quad v_1'(0) = 0, \quad v_1(L) = 0, \quad v_1'(L) = 0 \quad (18)$$

Además, al considerarse extremos rígidos e indeformables, la diferencia de desplazamiento axial entre el larguero superior y el larguero inferior se anula en ambos extremos:

$$u_2(0) = 0, \quad u_2(L) = 0 \quad (19)$$

Para el segundo bloque diferencial, las condiciones de borde asociadas al empotramiento resultan

$$v_2(0) = 0, \quad v_2'(0) = 0, \quad v_2(L) = 0, \quad v_2'(L) = 0 \quad (20)$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PRIMER BLOQUE

Para el primer bloque diferencial, correspondiente a las variables v_1, ψ_1 y u_2 , se parte del sistema indicado anteriormente. Como no se considera carga longitudinal externa, se adopta $p_2=0$. Eliminando las variables u_2 y ψ_1 , se obtiene una ecuación diferencial única para v_1 :

$$v_1^{(6)} - k^2 v_1^{(4)} = -2\alpha_1 \alpha_2 \frac{q_1}{E_I J_I} \quad (21)$$

siendo

$$k^2 = 2\alpha_1 \left(\frac{6h}{d^2} + \alpha_2 \right) \quad (22)$$

La solución general se escribe como la suma de una solución homogénea y una solución particular asociada a la carga distribuida uniforme:

$$v_1(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{kx} + C_6 e^{-kx} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 q_1}{12k^2 E_I J_I} x^2 (L - x)^2 \quad (23)$$

La función $\psi_1(x)$ se obtiene a partir de la ecuación diferencial de equilibrio transversal:

$$\psi_1' = \frac{d^2}{12} \left(v_1^{(4)} - \frac{q_1}{EJ_l} \right) \quad (24)$$

Por otra parte, la diferencia de desplazamiento axial entre los largueros se obtiene de

$$u_2'' = -\alpha_2 \psi_1 \quad (25)$$

Para simplificar la escritura se define a la constante ζ_1 como:

$$\zeta_1 = \frac{L}{k^3(e^{kL} - 1)EJ_l} \left(\frac{2\alpha_1\alpha_2}{k^2} - 1 \right) \quad (26)$$

Con esta definición, las constantes de integración pueden expresarse en función de C_5 y de la carga q_1 como

$$C_1 = \beta_1 C_5 + \zeta_2 q_1, \quad C_2 L = \beta_2 C_5 + \zeta_3 q_1, \quad C_3 L^2 = \beta_3 C_5 + \zeta_4 q_1 \quad (27)$$

$$C_4 L^3 = \beta_4 C_5 + \zeta_5 q_1, \quad C_6 = \beta_6 C_5 + \zeta_6 q_1 \quad (28)$$

con

$$\beta_1 = e^{kL} - 1, \quad \beta_2 = -kL(1 + e^{kL}), \quad \beta_6 = -e^{kL} \quad (29)$$

$$\beta_3 = 6(1 - e^{kL}) + 3kL(1 + e^{kL}), \quad \beta_4 = -4(1 - e^{kL}) - 2kL(1 + e^{kL}) \quad (30)$$

$$\zeta_2 = e^{kL} \zeta_1, \quad \zeta_3 = -kLe^{kL} \zeta_1, \quad \zeta_6 = -e^{kL} \zeta_1 \quad (31)$$

$$\zeta_4 = [e^{kL}(2kL - 3) + (kL + 3)]\zeta_1, \quad \zeta_5 = [e^{kL}(2 - kL) - (kL + 2)]\zeta_1 \quad (32)$$

La constante C_5 se obtiene de la condición de compatibilidad:

$$C_5 = -\frac{\zeta_{13}}{\beta_{13}} \zeta_1 q_1 \quad (33)$$

con

$$\beta_{13} = -\alpha_1 h \frac{2\beta_3}{L} + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{d^2 k^3}{12} \left[-\frac{L^2}{2} (1 + e^{kL}) \right] \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{13} = & \frac{d^2 k^3}{12} (E - 1) - \alpha_1 h \frac{2}{L} [E(2s - 3) + (s + 3)] \\ & + \frac{\alpha_1 \alpha_2 d^2 k^3 L^2}{72} (E - 1) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 d^2 k}{6} \left[1 - E - \frac{s^2}{6} (2E + 1) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

donde $E = e^{kL}$ y $s = kL$.

Finalmente, las expresiones agrupadas de $\psi_1(x)$ y $u_2(x)$ resultan

$$\begin{aligned} \psi_1(x) = & \frac{d^2 k^3}{12} [e^{kx} + e^{k(L-x)} - 1 - e^{kL}] C_5 \\ & + \frac{d^2 k^3}{12} \left[e^{k(L-x)} - e^{kL} + \frac{x}{L} (e^{kL} - 1) \right] \zeta_1 q_1 \end{aligned} \quad (36)$$

$$u_2(x) = \frac{\alpha_2 d^2 k}{12} \left[-e^{kx} - e^{k(L-x)} + \frac{k^2}{2} (1 + e^{kL}) x^2 - \frac{k^2 L}{2} (1 + e^{kL}) x + (1 + e^{kL}) \right] C_5 + \frac{\alpha_2 d^2 k}{12} \left[-e^{k(L-x)} + e^{kL} + \frac{x}{L} \left(1 - e^{kL} - \frac{k^2 L^2}{6} (2e^{kL} + 1) \right) + \frac{k^2}{2} e^{kL} x^2 - \frac{k^2}{6L} (e^{kL} - 1) x^3 \right] \zeta_1 q_1 \quad (37)$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL SEGUNDO BLOQUE

El segundo bloque diferencial permite determinar la componente diferencial de desplazamiento transversal entre el larguero superior y el larguero inferior. Reemplazando $\psi_2 = \alpha_5 v_2'$ en la segunda ecuación del bloque, se obtiene una única ecuación diferencial para v_2 :

$$v_2^{(4)} - \alpha_3 (1 - \alpha_5) v_2'' + \alpha_4 v_2 = \frac{q_2}{E I_l} \quad (38)$$

Para simplificar la escritura se define

$$a = \alpha_3 (1 - \alpha_5) \quad (39)$$

con lo cual la ecuación característica asociada a la parte homogénea queda

$$r^4 - ar^2 + \alpha_4 = 0 \quad (40)$$

Para los valores físicos considerados, el discriminante resulta negativo, por lo que la solución homogénea se expresa mediante raíces complejas conjugadas. Se definen entonces los parámetros

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\alpha_4} + \alpha_3 (1 - \alpha_5)}, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\alpha_4} - \alpha_3 (1 - \alpha_5)} \quad (41)$$

Como la carga es uniforme y la viga está empotrada en ambos extremos, la solución puede escribirse en forma centrada respecto del centro del tramo, mediante

$$v = x - \frac{L}{2} \quad (42)$$

La solución general para v_2 se escribe como

$$v_2(x) = C_{10} \cosh(\mu v) \cos(\omega v) + C_{11} \sinh(\mu v) \sin(\omega v) + Q_2 \quad (43)$$

donde

$$Q_2 = \frac{q_2}{\alpha_4 E I_l} \quad (44)$$

Para expresar el resultado final en forma compacta, se definen

$$A_{\mu\omega} = \mu \cosh\left(\frac{\mu L}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega L}{2}\right) + \omega \sinh\left(\frac{\mu L}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega L}{2}\right) \quad (45)$$

$$B_{\mu\omega} = \mu \sinh\left(\frac{\mu L}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega L}{2}\right) - \omega \cosh\left(\frac{\mu L}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega L}{2}\right) \quad (46)$$

$$\Delta_{\mu\omega} = \cosh\left(\frac{\mu L}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega L}{2}\right) A_{\mu\omega} - \sinh\left(\frac{\mu L}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega L}{2}\right) B_{\mu\omega} \quad (47)$$

Luego,

$$C_{10} = -\frac{Q_2 A_{\mu\omega}}{\Delta_{\mu\omega}}, \quad C_{11} = \frac{Q_2 B_{\mu\omega}}{\Delta_{\mu\omega}} \quad (48)$$

y la solución final resulta

$$v_2(x) = -\frac{Q_2 A_{\mu\omega}}{\Delta_{\mu\omega}} \cosh(\mu v) \cos(\omega v) + \frac{Q_2 B_{\mu\omega}}{\Delta_{\mu\omega}} \sinh(\mu v) \sin(\omega v) + Q_2 \quad (49)$$

Finalmente, la distorsión diferencial se obtiene directamente de

$$\psi_2(x) = \alpha_5 v_2'(x) \quad (50)$$

DEFORMADAS DE LOS LARGUEROS SUPERIOR E INFERIOR

Una vez resueltos los dos bloques diferenciales, las deformadas físicas de los largueros se obtienen invirtiendo el cambio de variables introducido previamente. Recordando que

$$v_1 = v_s + v_i, \quad v_2 = v_s - v_i \quad (51)$$

resulta

$$v_s(x) = \frac{v_1(x) + v_2(x)}{2}, \quad v_i(x) = \frac{v_1(x) - v_2(x)}{2} \quad (52)$$

Para el caso estudiado, la carga transversal uniforme se aplica únicamente sobre el larguero superior. En consecuencia, la carga superior excita simultáneamente la componente común v_1 y la componente diferencial v_2 . Esto implica que, en general,

$$v_s(x) \neq v_i(x) \quad (53)$$

La diferencia entre ambas deformadas queda dada por

$$v_s(x) - v_i(x) = v_2(x) \quad (54)$$

También pueden recuperarse las distorsiones de cada larguero a partir de

$$\psi_s(x) = \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{2}, \quad \psi_i(x) = \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{2} \quad (55)$$

y los giros nodales efectivos mediante las relaciones cinemáticas

$$\theta_s(x) = v_s'(x) - \psi_s(x), \quad \theta_i(x) = v_i'(x) - \psi_i(x) \quad (56)$$

Estas expresiones permiten reconstruir los desplazamientos y giros nodales de los largueros superior e inferior a partir de la solución continua equivalente.

RECUPERACIÓN DE ESFUERZOS INTERNOS EN LAS BARRAS

El modelo continuo equivalente permite obtener expresiones analíticas para los desplazamientos y giros de los nodos de la viga. Para recuperar los esfuerzos internos en las barras se evalúan dichas funciones en las posiciones discretas correspondientes a los nodos de la estructura original. Si los montantes se encuentran separados una distancia d , la coordenada del nodo k puede escribirse como

$$x_k = kd \quad (57)$$

con $k = 0, 1, 2, \dots, n$, siendo n el número de paneles de la viga. En cada nodo se calculan los desplazamientos transversales y giros mediante

$$v_{sk} = v_s(x_k), \quad v_{ik} = v_i(x_k), \quad \theta_{sk} = \theta_s(x_k), \quad \theta_{ik} = \theta_i(x_k) \quad (58)$$

De manera análoga, los desplazamientos longitudinales se recuperan a partir de

$$u_s(x) = \frac{u_1(x) + u_2(x)}{2}, \quad u_i(x) = \frac{u_1(x) - u_2(x)}{2} \quad (59)$$

Para un tramo de larguero comprendido entre los nodos k y $k + 1$, el vector de desplazamientos nodales del larguero superior puede escribirse como

$$\mathbf{d}_{sk} = \begin{Bmatrix} u_s(x_k) \\ v_s(x_k) \\ \theta_s(x_k) \\ u_s(x_{k+1}) \\ v_s(x_{k+1}) \\ \theta_s(x_{k+1}) \end{Bmatrix} \quad (60)$$

Los esfuerzos nodales de cada tramo de larguero se obtienen mediante la matriz de rigidez elemental de una barra de pórtico plano:

$$\mathbf{f}_{sk} = \mathbf{K}_l \mathbf{d}_{sk}, \quad \mathbf{f}_{ik} = \mathbf{K}_l \mathbf{d}_{ik} \quad (61)$$

En el caso de los montantes, los desplazamientos nodales se obtienen evaluando las funciones correspondientes al larguero superior e inferior en una misma posición x_k . El vector de desplazamientos del montante ubicado en x_k se arma con los desplazamientos y giros de los nodos inferior y superior, y sus esfuerzos se calculan mediante

$$\mathbf{f}_{pk} = \mathbf{K}_p \mathbf{d}_{pk} \quad (62)$$

De esta forma, la matriz de rigidez elemental no se utiliza aquí para formular una matriz de rigidez global equivalente de la viga, sino como herramienta de postproceso para recuperar los esfuerzos internos en cada barra a partir de la deformada analítica obtenida.

COMPARACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS

Con el objeto de evaluar la precisión del modelo analítico desarrollado, se compararon sus resultados con los obtenidos mediante un modelo detallado de elementos finitos. En dicho modelo se representaron individualmente los largueros y los montantes de la viga tipo Vierendeel mediante elementos finitos tipo viga con desplazamientos transversales cúbicos y lineales longitudinalmente con hipótesis de Bernoulli. Se mantienen la misma geometría, propiedades mecánicas y carga transversal uniforme considerada en la formulación analítica.

A partir de las expresiones obtenidas para $v_1(x)$, $v_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ y $u_2(x)$, se calcularon las deformadas del larguero superior e inferior mediante las relaciones indicadas anteriormente. Luego, evaluando las funciones analíticas en las posiciones nodales de la viga discreta, se recuperaron los desplazamientos y giros necesarios para calcular los esfuerzos internos en largueros y montantes mediante las matrices de rigidez elementales de barra.

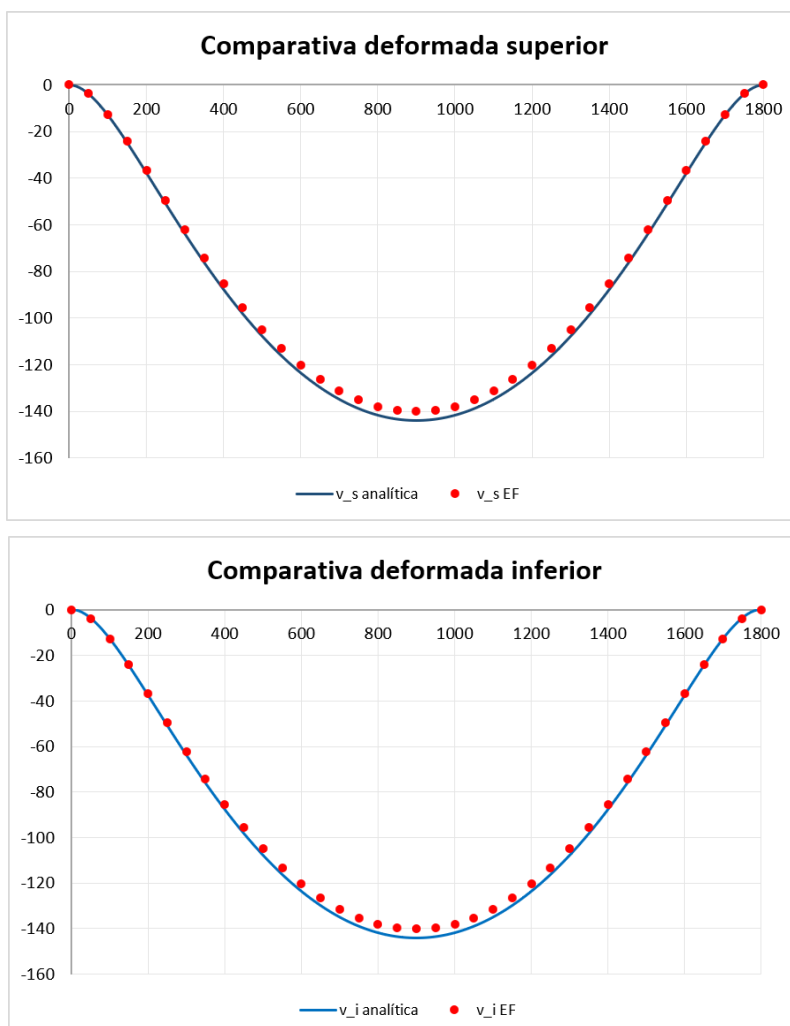


Figura 6. Comparación de deformadas del larguero superior e inferior con elementos finitos.

En la figura 6 se observa una muy buena concordancia entre la deformada obtenida mediante el modelo analítico (en línea llena) y la deformada obtenida mediante elementos finitos (puntos en correspondencia con los nodos). Para la geometría y propiedades adoptadas, las deformadas del larguero superior e inferior resultan prácticamente coincidentes. Esto indica que, si bien la carga aplicada sobre el larguero superior activa el bloque diferencial v_2 , su incidencia sobre la deformada transversal global es reducida para el caso analizado.

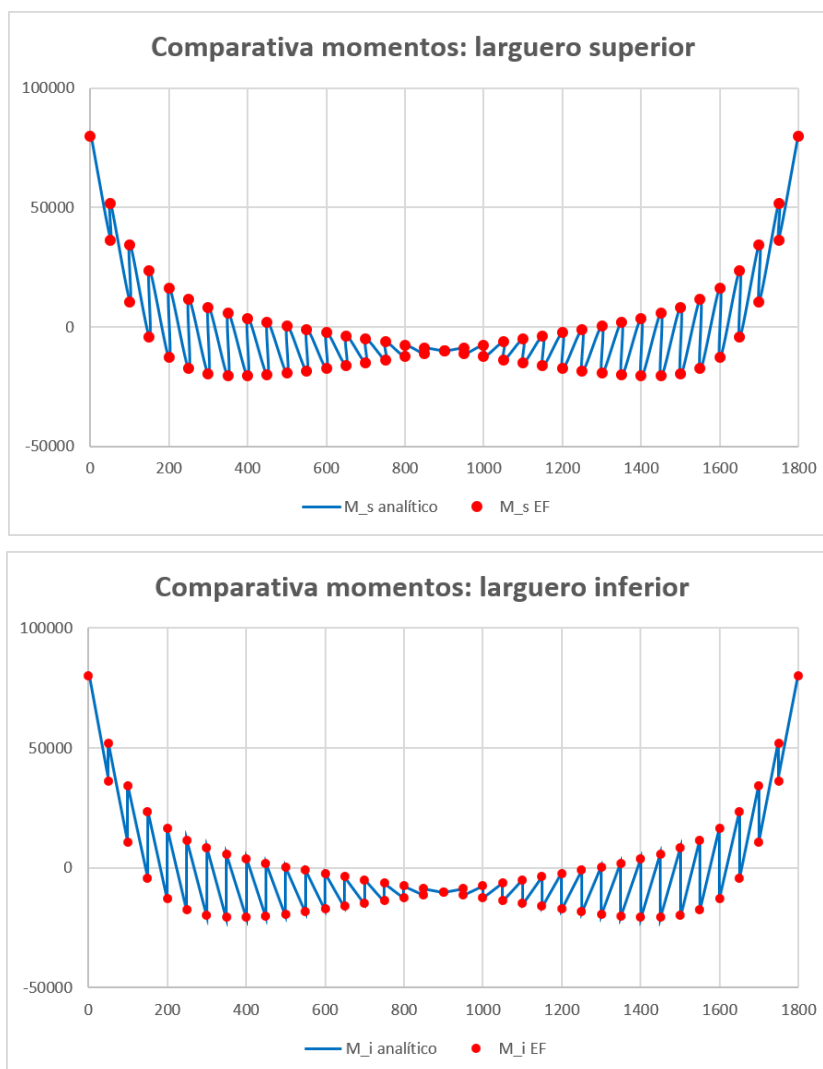


Figura 7. Comparación de momentos flectores en largueros con elementos finitos.

En la figura 7 se comparan los momentos flectores obtenidos mediante el procedimiento analítico con los obtenidos por elementos finitos en los largueros superior e inferior. La comparación permite verificar que el postproceso basado en las matrices elementales de barra reproduce adecuadamente la distribución de momentos internos en los elementos principales de la viga.

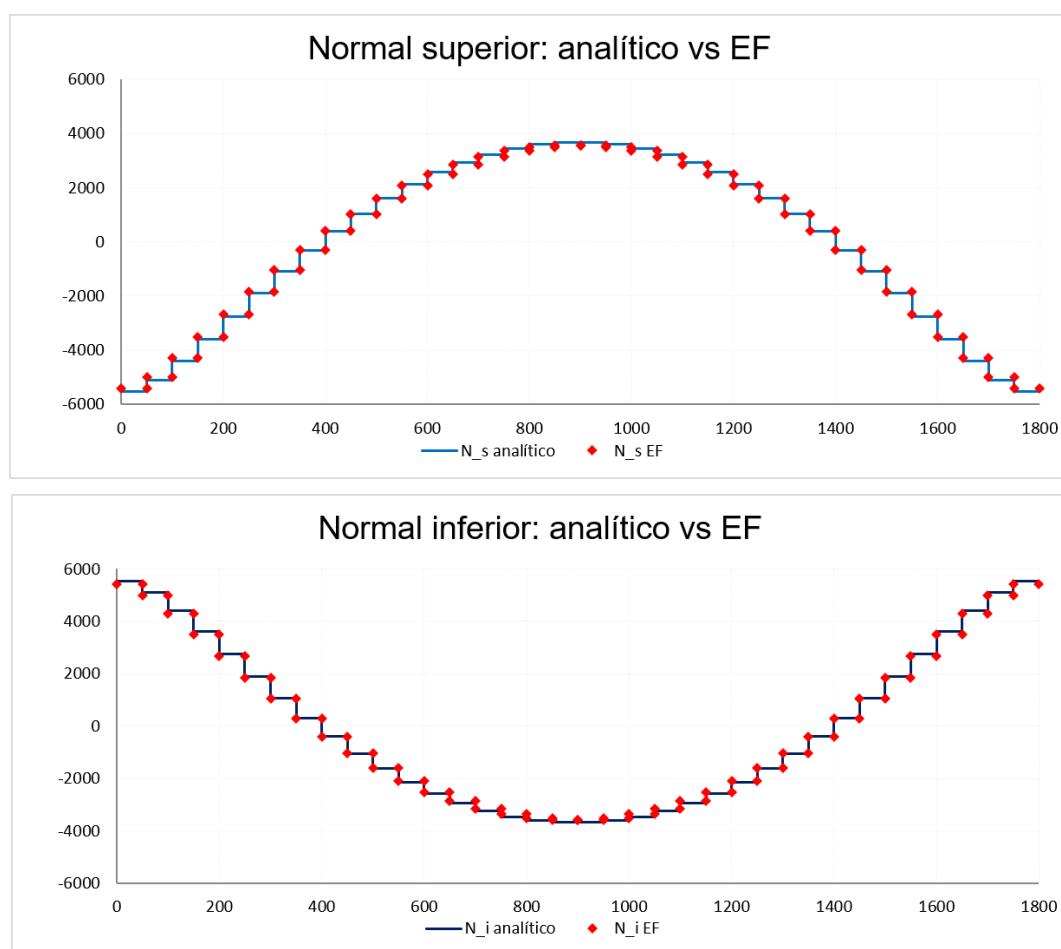


Figura 8. Comparación de esfuerzos normales en largueros con elementos finitos.

Finalmente, en la figura 8 se comparan los esfuerzos normales obtenidos en los largueros. También en este caso se observa una adecuada correspondencia entre los valores calculados a partir del modelo analítico y los obtenidos mediante el modelo detallado de elementos finitos. Estos resultados muestran que el modelo continuo equivalente permite obtener no sólo una buena aproximación de la deformada global de la viga, sino también valores representativos de los esfuerzos internos en las barras.

CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló una solución analítica para la deformada de una viga celosía tipo Vierendeel empotrada en ambos extremos, sometida a una carga transversal uniformemente distribuida aplicada sobre el larguero superior. Para ello se retomó el modelo continuo equivalente empleado previamente en el análisis de vigas empresilladas, incorporando el efecto de la deformación por corte o distorsión.

El planteo permitió desdoblar el problema en dos bloques diferenciales. El primero, asociado a las variables v_1 , ψ_1 y u_2 , representa la componente común de deformación transversal de los largueros y su acoplamiento con la diferencia de desplazamiento axial. El segundo, asociado a las variables v_2 y ψ_2 , representa la diferencia de deformación transversal entre el larguero superior y el larguero inferior.

Para el caso estudiado, al actuar la carga solamente sobre el larguero superior, se tiene $q_s=q$ y $q_i=0$. Esto muestra que una única carga aplicada sobre el larguero superior excita simultáneamente la componente común y la componente diferencial del modelo. A partir de las soluciones obtenidas para $v_1(x)$ y $v_2(x)$, las deformadas de los largueros superior e inferior se recuperan mediante las relaciones indicadas anteriormente.

Para la geometría analizada, la diferencia entre ambas deformadas resultó pequeña, por lo que los desplazamientos transversales de los largueros superior e inferior prácticamente coinciden. No obstante, la formulación conserva la capacidad de representar deformadas diferentes en ambos largueros cuando la geometría, la rigidez relativa de las barras o la distribución de cargas lo requieran.

También se mostró que, una vez obtenida la solución analítica, es posible recuperar los desplazamientos y giros nodales evaluando las funciones continuas en las posiciones de los nodos de la viga discreta. A partir de estos valores, los esfuerzos internos en largueros y montantes pueden calcularse mediante las matrices de rigidez elementales de barra.

La comparación con un modelo detallado de elementos finitos mostró una buena concordancia tanto en deformadas como en esfuerzos internos. Por lo tanto, el modelo propuesto constituye una herramienta útil para estimar la respuesta de vigas tipo Vierendeel con un costo computacional reducido, manteniendo una descripción suficientemente precisa de la deformación global y de los esfuerzos principales en las barras.

AGRADECIMIENTOS

Se desea destacar el soporte brindado por las instituciones que acompañan las líneas de investigación vinculadas al desarrollo de modelos simplificados para estructuras reticuladas y vigas empresilladas.

REFERENCIAS

1. Noor, A. K. (1988). Continuum Modeling for Repetitive Lattice Structures. *Applied Mechanics Reviews*, 41 (7), 285-296.
2. Jouglard, C. E. & Peker, U. (2019). *Matriz de Rigidez de Una Viga Empresillada: Aproximación Flexional Global* (Reporte de Investigación GADE-RI-2019-01). Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.
3. Jouglard, C. E. & Peker, U. (2021). Matriz de Rigidez de una Viga Empresillada Considerando Efectos de Corte, 26° Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, Rosario, Santa Fe, Argentina.
4. Jouglard, C. E. & James, D. (2022). *Matriz de Rigidez de una Viga Empresillada: Aproximación Analítica con Corte* (Reporte de Investigación GADE-RI-2022-01). Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.
5. Jouglard, C. E. & James, D. (2022). Matriz de Rigidez de una Viga Empresillada: Aproximación Analítica, 27° Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, Rosario, Santa Fe, Argentina.
6. Jouglard, C. E. & James, D. (2024). *Matriz de Rigidez de una Viga Empresillada:*

Solución Analítica con Factor de Corte (Reporte de Investigación GADE-RI-2024-01).
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.

7. Cook, Robert Davis, David S. Malkus, Michael E. Plesha, y Robert J. Witt. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4.^a ed. John Wiley & Sons, Inc., 2001.

8. Jouglard, C.E. & James, D. (2024). *Matriz de Rigidez de una Viga Empresillada: Solución Analítica con Factor de Corte*. (Reporte de Investigación GADE-RI-2024-01).
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.