

DESARROLLO Y VALIDACIÓN DE UNA HERRAMIENTA EN PYTHON/FORTRAN PARA EL DISEÑO Y VERIFICACIÓN DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO A FLEXIÓN BIAIXIAL

Pérez Zerpa, Jorge ^a; Caballero, Mehdi ^b; Colella Pagella, Facundo ^b

^aInstituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, jorgepz@fng.edu.uy

^bRAMÉ Ingeniería, mcaballero@rameingenieria.com / fcolellapagella@rameingenieria.com

Palabras clave: Hormigón armado, flexión biaxial, diagramas de interacción, diseño estructural, integración numérica

RESUMEN

Este trabajo presenta una herramienta computacional para la verificación y diseño de secciones de hormigón armado sometidas a flexión biaxial y carga axial. La metodología se basa en la integración numérica de las ecuaciones de equilibrio mediante los métodos de fajas y la cuadratura de Gauss-Legendre, asumiendo la hipótesis de Navier-Bernoulli y las leyes constitutivas de normativas internacionales como el Eurocódigo. La herramienta desarrollada en Python y Fortran permite la construcción de diagramas de interacción 2D y 3D y el cálculo del ratio de capacidad (CR) para evaluar la seguridad de las secciones ante un conjunto dado de cargas externas, en tiempos reducidos. El módulo de diseño identifica patrones de armado factibles que cumplen con las cuantías y separaciones normativas y son óptimos. La validación del software se realizó mediante la comparación con soluciones analíticas, ejemplos de la literatura y resultados de herramientas comerciales como ETABS y CYPECAD, demostrando precisión en los resultados obtenidos.

ABSTRACT

This work presents a computational tool for the verification and design of reinforced concrete sections subjected to axial load and biaxial bending. The methodology is based on the numerical integration of the equilibrium equations using the fiber method and Gauss-Legendre quadrature, assuming the Navier-Bernoulli hypothesis and constitutive laws from international codes such as Eurocode. The tool, developed in Python and Fortran, enables the construction of 2D and 3D interaction diagrams and the calculation of the capacity ratio (CR) to evaluate section safety under a given set of external loads with reduced processing times. The design module identifies feasible reinforcement patterns complying with code-defined ratios and spacing requirements. The validation was conducted comparing with analytical solutions, literature examples, and commercial software such as ETABS and CYPECAD results demonstrating high precision.

Introducción

En este trabajo se presenta una metodología para verificación y diseño de secciones de hormigón armado sometidas a fuerzas axiales y momentos. En esta sección se presenta una breve revisión bibliográfica destacando los métodos y abordajes más relevantes publicados en revistas científicas arbitradas en las últimas décadas. En las secciones posteriores se presentan los aspectos más relevantes de la metodología utilizada por la herramienta desarrollada y en las dos últimas secciones se presentan los resultados obtenidos y conclusiones, respectivamente.

Los primeros trabajos de aplicación de métodos numéricos a la verificación y diseño de secciones de hormigón armado pueden ser encontrados a finales de los años 90. En [1] se presenta uno de los primeros métodos para análisis seccional no lineal, utilizando una estrategia semi-analítica, iterativa. Años más tarde en [2] se presenta un método analítico para construir de forma aproximada la superficie de falla para secciones rectangulares sometidas a flexión biaxial. Luego, en [3, 4] se presenta una comparativa de métodos de cálculo analíticos y numéricos para la integración o verificación de secciones sometidas a momentos biaxiales. Se consideran expresiones constitutivas parábola-rectángulo basadas en Eurocódigo 2004. Se consideran secciones circular y rectangular con flexión biaxial. Se consideran métodos numéricos basados en integración numérica por puntos de Gauss, con fajas e integración utilizando teorema de Gauss.

En [5] se presenta una metodología para análisis seccional basada en el uso de expresiones analíticas de inercias, asumiendo una expresión de tensión cúbica. En [6] se presenta un método numérico para análisis seccional basado en la matriz tangente secante, y apropiado para secciones compuestas.

En [7] se presentan resultados experimentales obtenidos para columnas de hormigón armado de esbeltez no elevada sometido a momentos biaxiales. Luego en [8] se presenta una metodología numérica para diseño óptimo de secciones circulares o rectangulares sometidas a esfuerzos biaxiales, tomando como parámetro fijo la posición de los hierros cuya área se desea determinar de forma óptima. Posteriormente se continuaron presentando mejoras de los métodos de verificación, como por ejemplo, en [9], donde se presenta un método de verificación para secciones pretensadas o en [10] donde se presenta un método más general para secciones compuestas con geometrías de mayor complejidad.

Por último se menciona que en trabajos más recientes se han introducido técnicas sobre diseño, por ejemplo en [11] se aplica una formulación de optimización al diseño de secciones, aunque válida únicamente para flexión simple. Yendo hacia problemas de diseño más realistas, tenemos la revisión de [12] donde se destacan los algoritmos genéticos, y más recientemente, orientados hacia el proyecto ejecutivo, en [13] se presenta un método de diseño con detalle de armado, con aplicación a vigas continuas.

Los trabajos de Bonet y Pallarés, entre otros, demuestran la robustez de los métodos numéricos y semi-analíticos, lo que justifica la estrategia de verificación basada

en la integración numérica del equilibrio que se considerará para el desarrollo de la herramienta presentada en este trabajo.

Metodología de verificación y diseño

Se propone una metodología inspirada en la utilizada en [8], con modificaciones asumiendo deformaciones y tensiones positivas a tracción y otras convenciones de signo usuales.

Se asume la hipótesis de Navier-Bernoulli, por lo que la deformación axial $\varepsilon(y, z)$ en un punto cualquiera de coordenadas (y, z) de la sección transversal, adoptando el criterio de signos de tracción positiva, se expresa como:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 + z\chi_y - y\chi_z$$

donde ε_0 es la deformación axial en el origen de coordenadas, χ_y es la curvatura alrededor del eje y y χ_z es la curvatura alrededor del eje z . Esta relación puede expresarse en notación matricial como:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 + \mathbf{c}^T \mathbf{p}$$

donde $\mathbf{c} = [y, z]^T$ es el vector de coordenadas y $\mathbf{p} = [-\chi_z, \chi_y]^T$ es el vector perpendicular al vector de curvatura χ . La ecuación de la línea neutra, definida como el lugar geométrico de los puntos con deformación nula ($\varepsilon(y, z) = 0$), queda determinada por:

$$\varepsilon_0 + z\chi_y - y\chi_z = 0.$$

En la Figura 1 se muestra la sección con la línea neutra correspondiente y en gris el área comprimida. Para resolver los problemas con momento biaxial se considera un sistema de coordenadas y', z' tal que

$$\varepsilon(y', z') = \varepsilon_0 + z'\chi_{y'},$$

en la figura se identifica el ángulo α que forma el eje y' con el y que es el mismo que forma el vector de la curvatura con el eje y . En el sistema rotado, la curvatura tiene solamente la componente $\chi_{y'}$. El cambio de coordenadas puede ser realizado aplicando

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} \\ \text{coord}(v)_{B'} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ T = {}^{B'}(I)_B \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \\ \text{coord}(v)_B \end{matrix}$$

La expresión de las deformaciones puede ser escrita en función de la posición de la línea neutra y la curvatura. Primero se obtiene ε_0 considerando que la deformación es nula en la línea neutra:

$$\varepsilon_0 = -z'_{LN}\chi_{y'},$$

y substituyendo en la expresión de $\varepsilon(y', z')$ se tiene la expresión buscada:

$$\varepsilon(y', z') = (z' - z'_{LN})\chi_{y'}.$$

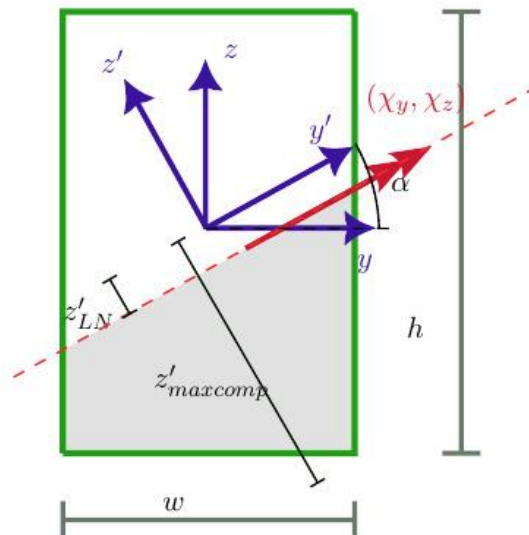


Figura 1: Esquema de sección y ejes coordenados

Como ecuaciones constitutivas para el hormigón se considera la fórmula del Eurocódigo dada por:

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 0 \\ 1000 \cdot f_{cd} \cdot \varepsilon \cdot (250 \cdot \varepsilon + 1) & \text{si } \varepsilon \in [-\varepsilon_{c2}, 0] \\ -f_{cd} & \text{si } \varepsilon \in [-\varepsilon_{cu2}, -\varepsilon_{c2}] \end{cases}$$

donde $\varepsilon_{c2} = 2\text{‰}$ y $\varepsilon_{cu2} = 3\text{‰}$. Mientras que para el acero se tiene que la tensión de límite elástico es $\varepsilon_y = 2.17\text{‰}$ y por lo tanto la ecuación está dada por

$$\sigma_s(\varepsilon) = \begin{cases} E \varepsilon & \text{si } |\varepsilon| < 2.17\text{‰} \\ f_{yd} \cdot \text{signo}(\varepsilon) & \text{si } |\varepsilon| \geq 2.17\text{‰} \end{cases}$$

En ambos casos se tiene una ecuación unidimensional y es por ello que es útil utilizar un sistema de coordenadas en el que la deformación axial pueda ser escrito en función de una variable z' .

Las ecuaciones de equilibrio establecen la equivalencia entre las tensiones internas generadas por las deformaciones y los esfuerzos externos aplicados. Considerando la contribución del hormigón y del acero, las solicitaciones internas se calculan integrando las tensiones sobre el área de la sección. Por ejemplo en el caso de la directa se tiene:

$$N_{int} = \int_{A_c} \sigma_c(\varepsilon(y, z)) dA + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_s(\varepsilon(y_{s,i}, z_{s,i})) A_{s,i}$$

donde A_c es el área comprimida de la sección, σ_c es la función de la tensión en el hormigón para una deformación dada, n_s es el número de barras de acero, $A_{s,i}$ es el

área de la barra i -ésima, σ_s es la función de la tensión en el acero para una deformación dada, $(y_{s,i}, z_{s,i})$ son las coordenadas de la barra i -ésima.

Las integrales pueden ser planteadas tanto en coordenadas y, z como en las coordenadas y', z' presentadas arriba. Además la transformación que lleva de una a otra es una rotación y por tanto el determinante del jacobiano del cambio de variable es 1. Aplicando el cambio de variables se tiene:

$$N_{int} = \int_{A_c} \sigma_c(\varepsilon(y', z')) dA + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_s(\varepsilon(y'_{s,i}, z'_{s,i})) A_{s,i}.$$

Dado que $\varepsilon(y', z')$, es una función que no depende de y' la integral se puede escribir como:

$$N_{int} = \int_{z'_{maxcomp}}^{z'_{LN}} \int_{y'_{min}(z')}^{y'_{max}(z')} \sigma_c(\varepsilon(y', z')) dy' dz' + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_s(\varepsilon(y'_{s,i}, z'_{s,i})) A_{s,i}.$$

por lo tanto

$$N_{int} = \int_{z'_{maxcomp}}^{z'_{LN}} \underbrace{\sigma_c(\varepsilon(y', z')) (y'_{max}(z') - y'_{min}(z'))}_{\text{ancho variable}} dz' + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_s(\varepsilon(y'_{s,i}, z'_{s,i})) A_{s,i}.$$

De forma análoga, se puede obtener las expresiones para los momentos flectores según y' :

$$M_{y',int} = \int_{z'_{maxcomp}}^{z'_{LN}} \sigma_c(\varepsilon(y', z')) z' (y'_{max}(z') - y'_{min}(z')) dz' + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_s(\varepsilon(y'_{s,i}, z'_{s,i})) A_{s,i} z'_{s,i},$$

y según z' :

$$M_{z',int} = - \int_{z'_{maxcomp}}^{z'_{LN}} \sigma_c(\varepsilon(y', z')) \frac{y'_{max}(z')^2 - y'_{min}(z')^2}{2} dz' - \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_s(\varepsilon(y'_{s,i}, z'_{s,i})) A_{s,i} y'_{s,i}.$$

Por último aplicando el cambio de variable nuevamente, se tiene los momentos en coordenadas yz .

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = T^T \cdot \begin{bmatrix} M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix}$$

Las integrales de superficie extendidas al área de hormigón se evalúan numéricamente de dos formas: utilizando fajas y cuadratura de Gauss-Legendre. En ambos casos se formula el problema como una integración unidimensional a lo largo del eje z' (perpendicular a la línea neutra) y se calcula la integral.

La integral de una función genérica $f(z')$ en el dominio $[-h'/2, h'/2]$ se aproxima como:

$$\int_{-h'/2}^{h'/2} f(z') dz' \approx \frac{h'}{2} \sum_{k=1}^{n_g} w_k f\left(\frac{h'}{2} \xi_k\right)$$

donde h' es la altura de la sección proyectada en la dirección z' , n_g es el número de puntos de integración, y (ξ_k, w_k) son los puntos y pesos de la cuadratura de Gauss-Legendre en el intervalo $[-1, 1]$. En el caso del método de fajas, simplemente se divide el dominio en un número dado de puntos a evaluar y sumar al estilo suma de Riemann.

Las solicitaciones internas debidas al hormigón se calculan entonces como:

$$N_{int}^c \approx \frac{h'}{2} \sum_{k=1}^{n_g} w_k \sigma_c(\varepsilon(z'_k)) b(z'_k) \quad M_{y',int}^c \approx \frac{h'}{2} \sum_{k=1}^{n_g} w_k \sigma_c(\varepsilon(z'_k)) b(z'_k) z'_k$$

donde $z'_k = \frac{h'}{2} \xi_k$ es la coordenada del k -ésimo punto de integración y $b(z'_k)$ es el ancho de la sección a esa altura, medido paralelamente al eje y' .

Tanto para la verificación como para el diseño se deberá construir el diagrama de interacción de la sección. Este diagrama, representa el conjunto de puntos del espacio de fuerzas, para los cuales la sección está en su límite en términos de resistencia de acuerdo con la norma correspondiente. Para la verificación la herramienta desarrollada realiza el cálculo del ratio de capacidad (CR), el cual es un indicador escalar que permite evaluar la seguridad de una sección de hormigón armado sometida a una combinación de carga axial y momentos flectores. Se define como el factor ρ por el cual deben multiplicarse las solicitaciones externas f_{ext} para alcanzar el estado límite último sobre la superficie de interacción. El CR puede ser representado como:

$$\rho = \frac{\|f_{ext}\|}{\|f_{int}\|}$$

Existen distintos criterios para hallar el estado límite último correspondiente a cada fuerza externa, en este trabajo se considera la continuación del vector de fuerza externa, hasta intersectar la superficie de falla. Si $\rho \leq 1$, la sección dispone de capacidad suficiente; en caso contrario, la sección es insuficiente.

Para obtener el punto de intersección se itera en los puntos del diagrama de interacción buscando aquel más cercano al punto de intersección mencionado anteriormente.

El método de diseño propuesto consiste de forma en:

1. crear una lista de todos los posibles patrones de armadura compatibles con restricciones dadas por la normativa (cuantías máxima y mínima, separaciones de hierros, etc). Para esto se parte de la lista de diámetros de hierros po-

sibles, y se itera en las posibles ubicaciones de estos hierros en cada posición del patrón de armadura (esquinas, armaduras inferior/superior, armadura izquierda/derecha).

2. ordenar esos patrones de armadura de acuerdo con algún criterio de preferencia, de más a menos favorable, por ejemplo ordenarlos de menor a mayor área total de acero
3. iterar en esa lista de patrones de armadura comenzando por la más favorable (por ejemplo la de menor área), calculando los ratios de capacidad para cada uno de los patrones de armadura, se avanza en la lista hasta llegar a un cierto número dado de armaduras que verifiquen (por ejemplo 10). Si se recorre toda la lista sin encontrar ninguna que verifique entonces no existe diseño posible para esa sección y cargas.
4. En el caso de haber encontrado un conjunto de armaduras factibles que verifiquen se elige una automáticamente (por ejemplo la que tenga menor área) y se puede opcionalmente mostrar también al usuario las otras opciones factibles consideradas en esa lista. Los criterios para elegir la mejor armadura pueden ser modificados por el usuario modificando factores en el código, para considerar también de forma ponderada cantidad de hierros o diferencias de diámetros.

Implementación

La implementación de la metodología propuesta se realizó a través de una librería de Python. La librería está basada en el paradigma de orientación a objetos y permite al usuario definir distintas opciones de ejecución, como por ejemplo el método de integración numérica (fajas o puntos de gauss). Las funciones de verificación o cálculo de ratio de capacidad fueron implementadas también en Fortran con el objetivo de aumentar la velocidad de ejecución.

Para la integración numérica usando puntos de Gauss se tomó por defecto 40 puntos en base a los resultados provistos por Bonet [3], con un error inferior al 2% y para el método de fajas se toma por defecto 1000 puntos.

Resultados de ejemplos de verificación

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al resolver ejemplos de prueba para validar algunas capacidades de la herramienta. Para la verificación de las soluciones se toman secciones de ejemplos de literatura y/o se comparan resultados con software de diseño como CYPECAD o ETABS.

Ejemplo 1: Diagrama de interacción de sección rectangular con momento en un eje

En este ejemplo se considera una sección de hormigón: H35, forma rectangular con altura 0.7 m, ancho 0.3 m, recubrimiento 0.05 m, $f_{yk} = 500 \times 10^6$ Pa, área de armadura A , tal que: $Af_{yd}/w = 5200 \times 10^3$ N/m, colocada a nivel inferior y superior.

En la Figura 2 se muestra la salida gráfica al ejecutar el ejemplo a la cual se le agregan puntos de verificación en rojo de la Validación contra [14], página 570, y valores calculados de forma analítica (simbólica) en verde. Respecto a la integración se utiliza el método de fajas. Las líneas punteadas rojas definen cambios de dominio en el diagrama de deformaciones. Se verifica el resultado numérico contra los 6 puntos del gráfico de Jimenez Montoya.

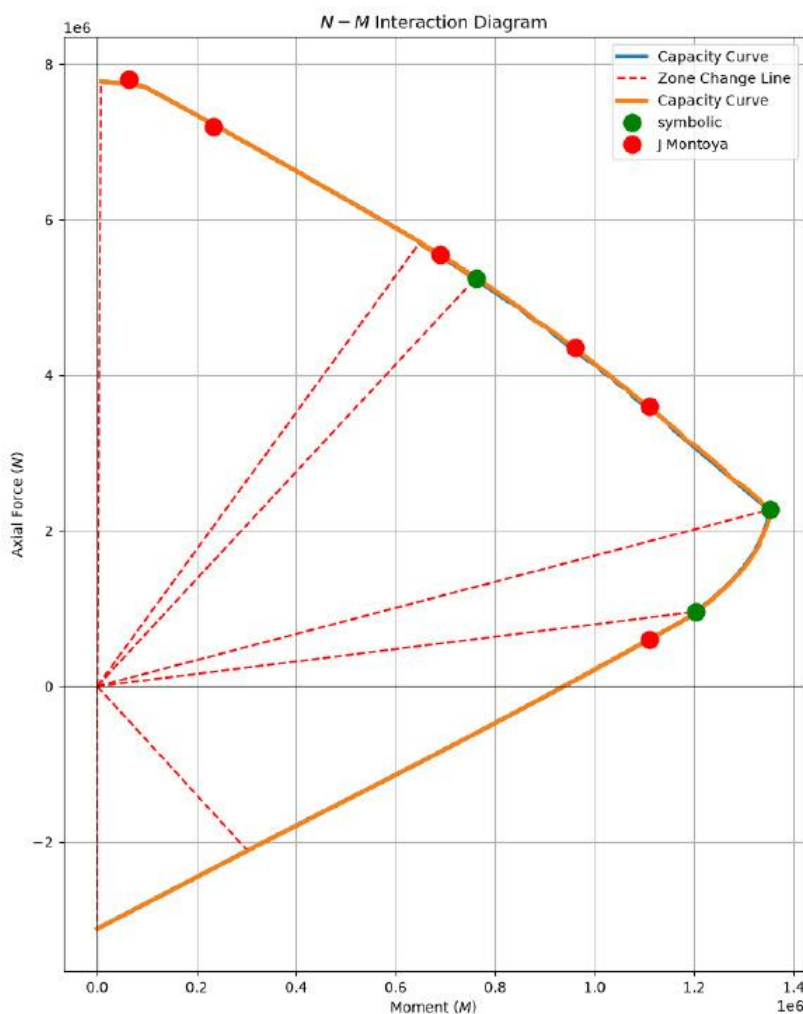


Figura 2: Validación de diagrama de interacción de ejemplo 1

Ejemplo 2: Verificación de sección circular con momento en un eje

Este ejemplo es similar al anterior, con mismo tipo de hormigón y acero, considerando una sección circular, de diámetro 0.5 m. Se consideran 6 pares de fuerza-momento, indicados en triángulos azules en las figuras. Para la armadura se consideran dos casos: un caso sin armadura y otro caso con 6 barras ϕ 20. En la Figuras 3 se muestran el caso con y sin armadura a la izquierda y derecha, respectivamente.

Se puede observar que en el caso sin armadura no se verifica, lo cual está indicado con una cruz roja, mientras que en el caso con armadura todas las fuerzas externas son verificadas y tienen un correspondiente punto verde en la curva del diagrama de interacción.

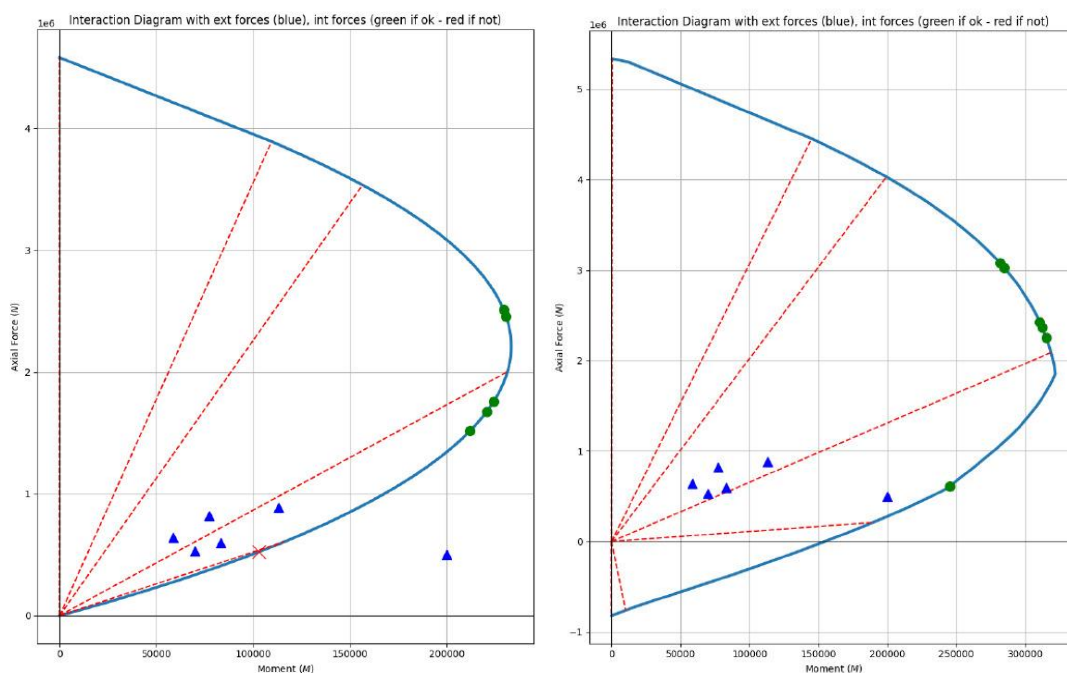


Figura 3: Diagramas de interacción

Ejemplo 3: Verificación de sección rectangular contra ETABS

En este ejemplo se resuelve un problema con los parámetros de un ejemplo de la documentación del software ETABS. El problema considera una sección rectangular de 550 mm de altura y 350 mm de ancho y 60 mm de recubrimiento mecánico. La sección es sometida a una fuerza de compresión de 2374 kN y un momento de 593 kNm. El hormigón tiene módulo $E = 25 \text{ GPa}$ y $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ y $f_{yk} = 460 \text{ MPa}$. La sección tiene armadura de 5 barras ϕ 25 tanto como armadura inferior como superior.

En la documentación del software ETABS se indica un **CR 0.993** mientras que el código desarrollado obtiene **CR 0.983**. Por otra parte, la herramienta provee la imagen del análisis seccional mostrada en la Figura 4.

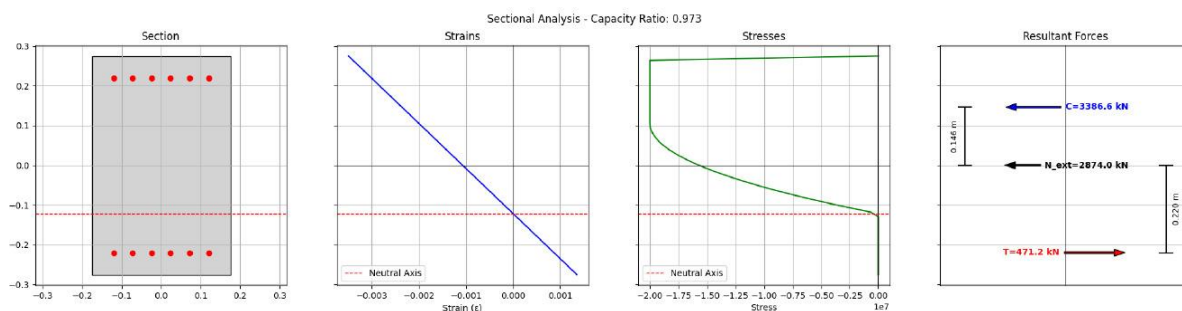


Figura 4: análisis seccional obtenido para sección de ejemplo 3.

En este caso también se aplica el método de diseño automatizado, obteniendo el armado de 5 ϕ 25 en zona superior e inferior. En este caso el diseño es realizado usando tanto la implementación en Python como en Fortran, verificando en ambos el resultado y logrando una reducción de tiempo considerable al usar Fortran.

Ejemplo 4: Verificación de sección rectangular con momento biaxial

En este ejemplo se considera un problema de una de las comprobaciones de la herramienta CYPECAD (Forjado 3 (6-9 m)), con una sección cuadrada de 40x40 cm y recubrimiento geométrico de 3 cm, 8 varillas 20 en total y materiales con $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ y $f_{yk} = 400 \text{ MPa}$. Se considera una fuerza de compresión de 144 kN y momentos 22.35 kNm y 102.44 kNm y se obtiene el gráfico mostrado en la Figura 5 donde las curvas azules forman la superficie de falla 3D y el punto rojo indica la fuerza externa.

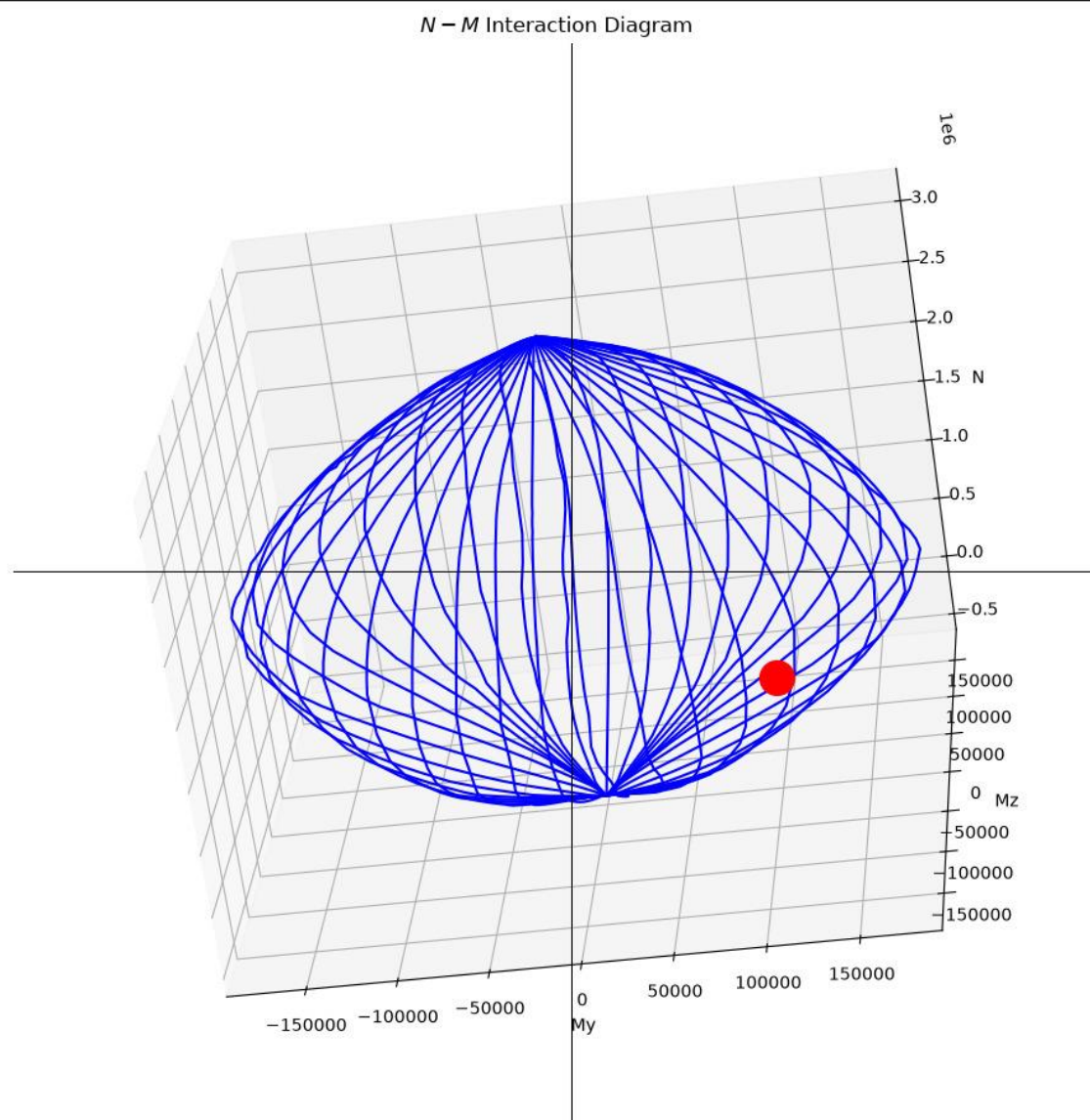


Figura 5: diagrama de interacción 3D de ejemplo 4.

Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se presentó la metodología y validación de una herramienta para verificación de secciones. Se resuelven algunos problemas comparando los resultados de la herramienta con soluciones de la literatura o provistas por herramientas comerciales reconocidas. Los resultados muestran que la herramienta logra resolver problemas con precisión en todos los casos resueltos. La migración a Fortran permitió acelerar la ejecución de la herramienta. La herramienta está en etapa inicial de desarrollo y cuenta con limitaciones como por ejemplo el hecho de no poder ser aplicada directamente a hormigón pretensado, a pesar de esto, el hecho de ser de código abierto permite a los proyectistas continuar su desarrollo sin limitaciones dadas por terceros.

Organiza:

Como mejoras a realizar a futuro se incluye la generalización de los parámetros de diseño o la extensión para secciones no rectangulares o circulares. La herramienta desarrollada promete ser un insumo valioso en el diseño de flujos de trabajo automatizado en verificación o diseño estructural.

Referencias

- [1] M. A. Pisani, A numerical method to analyse compact cross-sections, *Computers and Structures*, vol. 59, pp. 1063-1072, 1996.
- [2] J. L. Bonet, P. F. Miguel, M. A. Fernandez y M. L. Romero, Analytical Approach to Failure Surfaces in Reinforced Concrete Sections Subjected to Axial Loads and Biaxial Bending, *Journal of Structural Engineering*, vol. 130, pp. 2006-2015, 2004.
- [3] J. L. Bonet, M. L. Romero, P. F. Miguel y M. A. Fernandez, A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending, *Computers & Structures*, vol. 82, pp. 213-225, 2004.
- [4] J. L. Bonet, M. H. F. M. Barros y M. L. Romero, Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending, *Computers & Structures*, vol. 84, pp. 2184-2193, 2006.
- [5] J. B. M. Sousa y C. F. D. G. Muniz, Analytical integration of cross section properties for numerical analysis of reinforced concrete, steel and composite frames, *Engineering Structures*, vol. 29, pp. 618-625, 2007.
- [6] L. Rosati, F. Marmo y R. Serpieri, Enhanced solution strategies for the ultimate strength analysis of composite steel-concrete sections subject to axial force and biaxial bending, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pp. 1033-1055, 2008.
- [7] L. Pallarés, J. L. Bonet, P. F. Miguel y M. A. Fernández Prada, Experimental research on high strength concrete slender columns subjected to compression and biaxial bending forces, *Engineering Structures*, vol. 30, pp. 1879-1894, 2008.
- [8] L. Pallarés, P. F. Miguel y M. A. Fernández-Prada, A numerical method to design reinforced concrete sections subjected to axial forces and biaxial bending based on ultimate strain limits, *Engineering Structures*, vol. 31, pp. 3065-3071, 2009.
- [9] F. Marmo, R. Serpieri y L. Rosati, Ultimate strength analysis of prestressed reinforced concrete sections under axial force and biaxial bending, *Computers and Structures*, vol. 89, pp. 91-108, 2011.
- [10] V. K. Papanikolaou, Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load, *Computers & Structures*, vol. 98-99, pp. 33-54, 2012.
- [11] A. L. Rojas, S. López y M. Medina, Optimización de vigas de concreto reforzado para secciones rectangulares con experimentos numéricos, *Computación y Sistemas*, vol. 22, pp. 599-606, 2018.

- [12] M. Afzal, Y. Liu, J. C. P. Cheng y V. J. L. Gan, Reinforced concrete structural design optimization: A critical review, *Journal of Cleaner Production*, vol. 260, pp. 120623, 2020.
- [13] R. Pierott, A. W. A. Hammad, A. Haddad, S. Garcia y G. Falcón, A mathematical optimisation model for the design and detailing of reinforced concrete beams, *Engineering Structures*, vol. 245, pp. 112861, 2021.
- [14] P. Jimenez Montoya, A. Garcia Mesequer, F. Morán Cabré y J. C. Arroyo Portero, Hormigón Armado, 2009.