

MATRIZ RIGIDEZ DEL ELEMENTO DE BARRA DE GEOMETRIA IMPERFECTA TENIENDO EN CUENTA LA INFLUENCIA DEL ESFUERZO AXIL

Martinez Daniel;

Ingeniero Civil Magister en Ingeniería Estructural

Facultad Regional Avellaneda Universidad Tecnológica Nacional

ingcivilmartinez@yahoo.com.ar

Sarpero Carlos Jorge

Ingeniero en Construcciones Civiles Magister en Ingeniería Estructural

Facultad Regional Avellaneda Universidad Tecnológica Nacional.

ingsarpero@gmail.com

RESUMEN

Este trabajo es la continuación del presentado en las 28° Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural. En el mismo, se hallaron las expresiones de los elementos de la matriz rigidez del elemento de barra de geometría imperfecta, teniendo en cuenta la influencia del esfuerzo axil. La finalidad de este trabajo es continuar con los objetivos que quedaron pendientes en el trabajo anterior, indicados en el punto 8 bajo el título, Futuros Objetivos, lo cuales se indican a continuación:

Resolver estructuras más complejas, Barras de inercia variable, Determinar los límites de imperfección admisibles bajo las hipótesis adoptadas., Solución de la barra bi empotrada imperfecta sometida a otros estados de carga estáticas (Fuerza y Par concentrados, cargas repartidas variables)

ABSTRACT

This work is the continuation of the work presented in the 28! Argentine Journeys of Structural Engineering. In that work, the expressions of the non perfect geometry bar element stiffness matrix, considering the effect of the axial force, were developed. The goal of this work is to continue developing the pending goals in the preceding work detailed in the point 8, named as, Future Goals, which are :

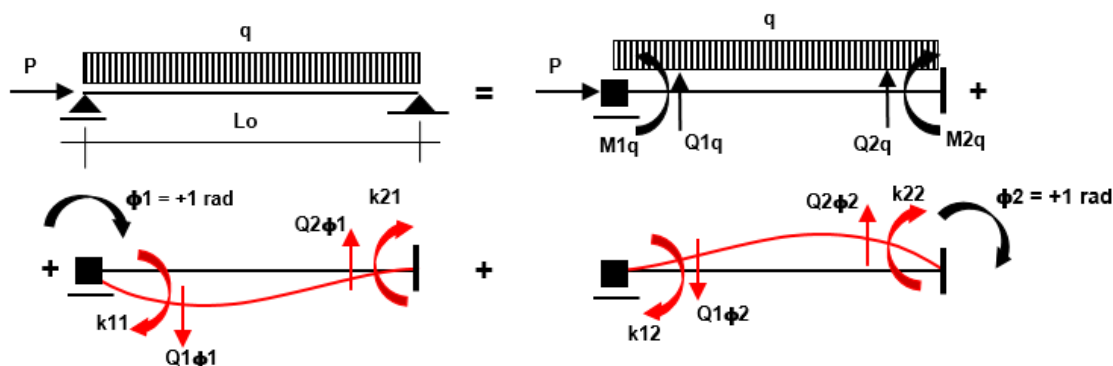
Solving more complex structures, Variable Inertia Bar element, Determination of the admissible imperfection limits under the stated hypothesis, Solution of the bi embedded bar element acting concentrated forces and non constant loads per unit of length

1.a ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LA IMPERFECCION GEOMETRICA EN EL ELEMENTO DE BARRA EN RANGO ELASTICO

En el trabajo anterior se hallaron las expresiones de los elementos de la matriz rigidez del elemento de barra de geometría imperfecta teniendo en cuenta la influencia del esfuerzo axial, y los pares y fuerzas extremos de barra, de una barra Bi Empotrada, sometida a una carga uniformemente repartida. Al final del trabajo se resolvió una viga simplemente apoyada de geometría perfecta sometida a la acción de una carga uniformemente repartida y a una fuerza de compresión P . Los resultados obtenidos coincidieron exactamente con los dados en⁸ pág 482.

A continuación se retoma el mismo ejemplo, y se analiza la influencia de la imperfección en los esfuerzos y la deformación en la sección central de la viga.

Figura 1 : Estructura resuelta por superposición de efectos



El análisis se realiza resolviendo la estructura para distintos valores de imperfección tal como se indica en la siguiente tabla. A la estructura determinada cinemáticamente se la denomina, Estructura Fundamental. Se analizan además :

valores de rigidez (los $k_{i,j}$,) Unidad ($\text{kN}\cdot\text{m}$)

Momentos de empotramiento (M_{1q} , y M_{2q}), Unidad ($\text{kN}\cdot\text{m}$)

Momento Flector en el centro de la barra

en el Fundamental Sometido a q [$M_o(Lo/2)$] Unidad ($\text{kN}\cdot\text{m}$)

Momento Flector en el centro de la barra

en el Fundamental Sometido a $\phi_1 + 1.00$ rad [$M_{1r}(Lo/2)$] Unidad ($\text{kN}\cdot\text{m}$)

Momento Flector en el centro de la barra

en el Fundamental Sometido a $\phi_2 + 1.00$ rad [$M_{2r}(Lo/2)$] Unidad ($\text{kN}\cdot\text{m}$)

Rotaciones en los Nudos 1 y 2 [ϕ_1 , y ϕ_2]

Momento Flector en el centro de la barra isostática [$M(Lo/2)$] Unidad ($\text{kN}\cdot\text{m}$)

Tabla 2 :Imperfección (L / coef), Rigideces (kij), Momentos de Empotramiento $M_{1q} = M_{2q}$

L / coef	k11	k12=k21	k22	$M_{1q} = M_{2q}$
1000	451.973481	259.330423	451.973481	-0.688868
750	451.900591	259.403313	451.900591	-0.761943
500	451.754755	259.549149	451.754755	-0.908148

Tabla 3 :Imperfección (L / coef), Momentos en la fundamental, en la isostática, y rotaciones

L / coef	$M_o(L_o/2)$	$M_{1r}(L_o/2)$	$M_{2r}(L_o/2)$	ϕ_1	ϕ_2	$M(L_o/2)$
1000	0.355749	138.11226	138.11226	0.003575878	-0.003575878	1.3434941
750	0.393486	138.1499	138.1499	0.003958201	-0.003958201	1.4871362
500	0.46899	138.22521	138.22521	0.004724878	-0.004724878	1.7751844

Tabla 4 :Imperfección, Momentos en la isostática, perfecta e imperfecta, y relación entre Máximos

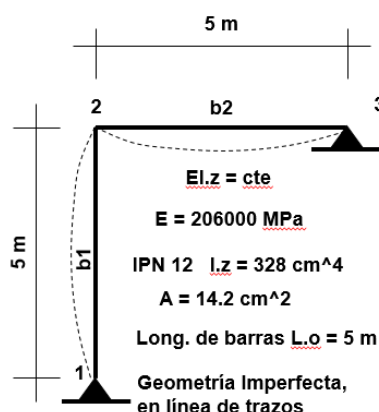
coef	$vo(L/2)$	M_{impMax}	$M_{perfMax}$	Relac
1000	0.004	1.34349407	0.914	1.469905987
750	0.00533	1.4871362	0.914	1.627063725
500	0.008	1.7751844	0.914	1.942214885

Se observa que donde más impacta la imperfección es en la barra Bi Empotrada (Estructura Fundamental) sometida a la carga q (ver columna $M_{1q} = M_{2q}$) y en el valor del Momento Flector en el centro del tramo, en la barra isostática (ver columnas M_{impMax} $M_{perfMax}$) En las rigideces el impacto es mucho menor (ver columnas de las k_{ij}). $vo(L/2)$ es el valor de la imperfección en el centro del tramo.

1.b Pórtico Plano

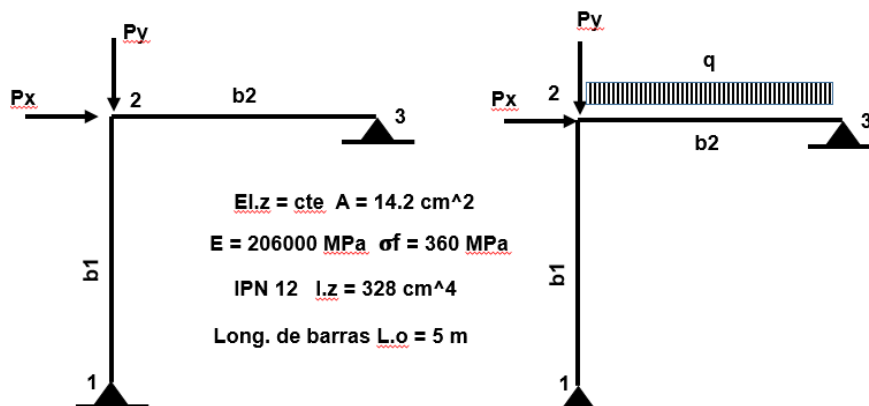
Se analiza ahora un pórtico plano formado por dos barras, de geometría imperfecta (en línea de trazo se indica la imperfección).

Figura 2 : Estructura Aporticada



sometido a estados de cargas como se indica en la figura a continuación. $L_o / 300$ se adopta como máximo valor de imperfección y de desplazamiento en tramo de barra.

Figura 3 : Estructura aporticada sometidas a estados de carga distintos



El método tradicional para la determinación de la carga crítica de una estructura, es ir aumentando el valor de las cargas hasta que el determinante de la matriz rigidez en segundo orden se anule. En los cursos de grado no se suele tener en cuenta la imperfección en la geometría de las barras y en caso de que la estructura posea, no sólo cargas en nudos sino también cargas en barras (como en la estructura del ejemplo) se determinan los esfuerzos axiles en primer orden, y luego son estos esfuerzos los que se van incrementado hasta anular el determinante de la matriz rigidez en segundo orden. El valor de la carga crítica hallada de esta manera es el valor real, para el caso de geometría perfecta, y bajo la simplificación de reemplazar las cargas en barras por fuerzas nodales equivalentes. Aceptadas estas hipótesis, es posible calcular para cada escalón de cargas los desplazamientos nodales, pero no los desplazamientos en las secciones de las barras, debidas a la acción de las cargas en barras. El objetivo de este ejemplo es tener en cuenta las imperfecciones geométricas en los desplazamientos y en los esfuerzos internos, dejando de lado el reemplazo de las cargas en barras por fuerzas nodales equivalentes.

$P_{cr} \rightarrow$ Carga Crítica $P_x = P_y = P \text{ (kN)}$

$dx, dy \text{ (m)}$ $\phi \text{ (rad)}$

Tabla 5 : 1°) Barra PERFECTA $q = 0$ $P = 258.96 \text{ kN}$ (P_{cr})
Vector Rotaciones ϕ y Desplazamientos Nodales dx, dy

ϕ nudo1	$1.8254 \cdot 10^{-3}$
dx nudo2	$4.5636 \cdot 10^{-3}$
dy nudo2	$4.5636 \cdot 10^{-3}$
ϕ nudo2	$3.8261 \cdot 10^{-15}$
ϕ nudo3	$-1.8254 \cdot 10^{-3}$

Tabla 6 : 2°) Barra IMPERFECTA $q = 0$ $P = 258.96$ kN (P_{cr})
 dx, dy (m) ϕ (rad)

Vector Rotaciones ϕ y Desplazamientos Nodales dx, dy

ϕ nudo1	-1.1993E+03
dx nudo2	5.0600E-02
dy nudo2	4.8800E-02
ϕ nudo2	1.2191*10 ⁻³
ϕ nudo3	-1.2388E+03

Para el caso 2°) se observan valores de rotación en los nudos y máximo desplazamiento en el tramo de la barra 2 (**vMáx Tramo b2**) inadmisibles.

$$vMáx \text{ Tramo } b2 \quad 1.9559 \times 10^{-3} \text{ m} = 1955.9 \text{ m} \gg 0.01666 \text{ m}$$

Estas diferencias marcan la importancia de tener en cuenta la imperfección geométrica al armar la matriz de rigidez del elemento en segundo orden.

En el siguiente caso, se limita el valor de la carga P para que el máximo desplazamiento en el tramo de la barra 2 (**vMáx Tramo b2**) no supere el máximo admisible adoptado, $L_o / 300 = 0.016667 \text{ m}$

Tabla 6 : 3°) Barra IMPERFECTA $q = 0$ $P_{max} = 140$ kN
 dx, dy (m) ϕ (rad)

Vector Rotaciones ϕ y Desplazamientos Nodales dx, dy

ϕ nudo1	-3.0458E-03
dx nudo2	2.4695*10 ⁻³
dy nudo2	2.4937*10 ⁻³
ϕ nudo2	5.312*10 ⁻³
ϕ nudo3	-7.5385E-03

$$vMáx \text{ Tramo } b2 \quad 0.0167227 \text{ m} \approx 0.016667 \text{ m}$$

$$\sigma_x \text{ max. Tramo } b2 \quad -185.6500 \text{ MPa}$$

Por último, en la barra 2 se coloca una carga $q = 2$ kN / m y se reduce el valor de la fuerza de dirección vertical el un valor $q \cdot L_o^2 / 2$. La idea es ver cómo impacta en los desplazamientos y esfuerzos de una estructura la acción de las cargas transversales en la barras, en dos casos :

1° sin considerar la imperfección geométrica de la barras (4°)

2° teniendo en cuenta la imperfección geométrica de las barras (5°)

**Tabla 6 : 4°) Barra PERFECTA $q = 2 \text{ kN / m}$ $P_{\text{max}} 140 \text{ kN}$
 $dx, dy \text{ (m) } \phi \text{ (rad)}$**

Vector Rotaciones ϕ y Desplazamientos Nodales dx, dy

ϕ nudo1	-1.0900E-02
dx nudo2	$2.4792 \cdot 10^{-3}$
dy nudo2	$2.4572 \cdot 10^{-3}$
ϕ nudo2	1.7200E-02
ϕ nudo3	-2.3400E-02

$v_{\text{Máx Tramo b2}} \quad 0.0354 \text{ m} > 0.016667 \text{ m}$

$\sigma_x \text{ max.Tramo b2} \quad -269.12 \text{ MPa}$

**Tabla 7 : 5°) Barra IMPERFECTA $q = 2 \text{ kN / m}$ $P_{\text{max}} 140 \text{ kN}$
Vector Rotaciones ϕ y Desplazamientos Nodales dx, dy**

ϕ nudo1	-1.4100E-02
dx nudo2	$2.4836 \cdot 10^{-3}$
dy nudo2	$2.4858 \cdot 10^{-3}$
ϕ nudo2	2.2000E-02
ϕ nudo3	-2.9900E-02

$v_{\text{Máx Tramo b2}} \quad 0.0498 \text{ m} > 0.016667 \text{ m}$

$\sigma_x \text{ max.Tramo b2} \quad -353.93 \text{ MPa}$

**Tabla 8 : Errores entre Máximos de Desplazamientos y Tensiones
con y sin Imperfección**

Errores	IMPERECTA / PERFECTA (%)
$v_{\text{Máx Tramo b2}}$	40.68
$\sigma_x \text{ max.Tramo b2}$	31.51

No tener en cuenta la imperfección geométrica implica cometer errores muy importantes. Para el caso 4°) Geometría Perfecta con $q = 2 \text{ kN / m}$, si bien la máxima tensión normal es inferior a la admisible, el máximo desplazamiento en el tramo es más del doble del admisible adoptado. Similares observaciones para el caso 5°); la máxima tensión normal no supera la admisible (iguala) el máximo desplazamiento en el tramo triplica el admisible adoptado.

2. Barras de Inercia Variable

Debido a la complejidad de la resolución de la ecuación diferencial de la línea elástica del elemento de barra de inercia variable en segundo orden de geometría imperfecta, se ha optado por un método numérico de resolución. El método adoptado es El Método de las Diferencias Finitas Centradas; por lo cual, el primer paso será, partiendo de la

derivada segunda de la línea elástica, expresar la derivada cuarta de la elástica en Diferencias Finitas.

Derivada Segunda

$$EI(x) \cdot v''(x) = -M_z(x) - P \cdot v(x) + P \cdot v_0(x) \quad (1)$$

Nomenclatura : El superíndice I, II, etc, indica el orden de derivación.

$v(x)$ Función Elástica $v_0(x)$ Función Imperfección

$M_z(x)$ Función Momento Flector, P Esfuerzo Axil, $q(x)$ Función Carga Repartida

En pos de disminuir la extensión de las expresiones de ahora en más se omitirá indicar que la rigidez flexional (EI), la elástica y sus derivadas, M_z , y v_0 , son función de x .

Por lo cual

$$EI(x) \cdot v''(x) = -M_z(x) - P \cdot v(x) + P \cdot v_0(x) \quad (2)$$

queda

$$EI \cdot v'' = -M_z - P \cdot v + P \cdot v_0 \quad (3)$$

Derivando la (3) dos veces se llega a la derivada cuarta

$$EI \cdot v'''' + 2EI \cdot v''' + EI \cdot v'' = q - P \cdot v'' - P \cdot v_0'' \quad (4)$$

Se expresa la (4) en Diferencias Finitas Centradas, en una sección genérica, i , de la barra.

$$\begin{aligned} & \left(EI'' \right)_k \cdot \left(\frac{v_{k-1} - 2 \cdot v_k + v_{k+1}}{s^2} \right) + 2 \cdot \left(EI' \right)_k \cdot \left(\frac{-v_{k-2} + 2 \cdot v_{k-1} - 2 \cdot v_{k+1} + v_{k+2}}{2 \cdot s^3} \right) + \\ & + EI_k \cdot \left(\frac{v_{k-2} - 4 \cdot v_{k-1} + 6 \cdot v_k - 4 \cdot v_{k+1} + v_{k+2}}{s^4} \right) + P \cdot \left(\frac{v_{k-1} - 2 \cdot v_k + v_{k+1}}{s^2} \right) = q_k - P \cdot v_0'' \end{aligned}$$

Definiendo $k_i^2 = \frac{P}{EI_i}$

y ordenando términos, la expresión de la derivada cuarta en Diferencias Finitas Centradas en una sección genérica, i , resulta :

$$\left[\frac{1}{s^2} - \frac{(EI')_i}{s \cdot EI_i} \right] \cdot v_{i-2} + \left[k_i^2 + 2 \cdot \frac{(EI')_i}{s \cdot EI_i} + \frac{(EI'')_i}{EI_i} - \frac{4}{s^2} \right] \cdot v_{i-1} + \left[\frac{6}{s^2} - \frac{2 \cdot (EI'')_i}{EI_i} - 2 \cdot k_i^2 \right] \cdot v_i + \dots$$

$$\left[k_1^2 - \frac{2(EI)_i}{s \cdot EI_1} + \frac{(EI)_{ii}}{EI_1} - \frac{4}{s^2} \right] \cdot v_{i+1} + \left[\frac{(EI)_i}{s \cdot EI_1} + \frac{1}{s^2} \right] \cdot v_{i+2} = \frac{q_i}{EI_1} \cdot s^2 - k_1^2 \cdot v_o \cdot s^2 \quad (5)$$

Para el caso de la barra de geometría perfecta, de sección constante y sin tener en cuenta la influencia del esfuerzo axial (primer orden) la (5) tiende a la expresión de la derivada cuarta en diferencias finitas centradas.

Dividiendo la barra en n tramos, y planteando la (5) en las n + 1 secciones resultantes de la división, se obtiene un sistema de n + 1 ecuaciones algebraicas lineales con n + 1 incógnitas siendo los v.i, los valores aproximados de la elástica en cada una de las secciones. Expresando la curvatura (derivada segunda de la elástica) y la derivada tercera en diferencias finitas en una sección genérica, i, se obtienen el momento y el corte en esa sección. La solución obtenida dependerá del valor de q, y de las condiciones de borde (rotaciones y desplazamientos nodales), esto es : q = 0, incógnitas cinemáticas actuando una a la vez, con valor positivo y unitario, da por resultado la matriz rigidez del elemento. Caso contrario, se obtienen los pares y fuerzas extremas de barra debidas a la acción de q.

A continuación se presenta el algoritmo programado en MathCad, para la acción de la incógnita rotación en el nudo izquierdo, $\phi_1 = +1\text{rad}$

Mc -> Matriz de Coeficientes, s -> long barra / Ntramos, Nfilas -> Ntramos - 2

Iz(xi) -> Momento de Inercia en la sección i de coordenada xi

Armado de la Matriz de Coeficientes

$M_c := \text{for } i \in 1..N_{\text{filas}}$

```

x1 ← i·s
I ← Iz(x1)
Mci,i ←  $\frac{6}{s^2} - \frac{2(EI)_{ii}}{EI_1} - 2 \cdot k_1^2$ 
if i = 1
    Mci,i+1 ←  $k_1^2 - \frac{2(EI)_i}{s \cdot EI_1} + \frac{(EI)_{ii}}{EI_1} - \frac{4}{s^2}$ 
    Mci,i+2 ←  $\frac{(EI)_i}{s \cdot EI_1} + \frac{1}{s^2}$ 
if i = 2
    Mci,i-1 ←  $k_1^2 + 2 \cdot \frac{(EI)_i}{s \cdot EI_1} + \frac{(EI)_{ii}}{EI_1} - \frac{4}{s^2}$ 
    Mci,i+1 ←  $k_1^2 - \frac{2(EI)_i}{s \cdot EI_1} + \frac{(EI)_{ii}}{EI_1} - \frac{4}{s^2}$ 
    Mci,i+2 ←  $\frac{(EI)_i}{s \cdot EI_1} + \frac{1}{s^2}$ 

```

Organiza:

if $i \geq 3 \wedge i \leq N_{\text{filas}} - 2$

$$\left| \begin{array}{l} M_{c_{i,i-2}} \leftarrow \frac{1}{s^2} - \frac{(EI^I)_i}{s \cdot EI_i} \\ M_{c_{i,i-1}} \leftarrow k_i^2 + 2 \cdot \frac{(EI^I)_i}{s \cdot EI_i} + \frac{(EI^{II})_i}{EI_i} - \frac{4}{s^2} \\ M_{c_{i,i+1}} \leftarrow k_i^2 - \frac{2 \cdot (EI^I)_i}{s \cdot EI_i} + \frac{(EI^{II})_i}{EI_i} - \frac{4}{s^2} \\ M_{c_{i,i+2}} \leftarrow \frac{(EI^I)_i}{s \cdot EI_i} + \frac{1}{s^2} \end{array} \right|$$

if $i = N_{\text{filas}} - 1$

$$\left| \begin{array}{l} M_{c_{i,i-2}} \leftarrow \frac{1}{s^2} - \frac{(EI^I)_i}{s \cdot EI_i} \\ M_{c_{i,i-1}} \leftarrow k_i^2 + 2 \cdot \frac{(EI^I)_i}{s \cdot EI_i} + \frac{(EI^{II})_i}{EI_i} - \frac{4}{s^2} \\ M_{c_{i,i+1}} \leftarrow k_i^2 - \frac{2 \cdot (EI^I)_i}{s \cdot EI_i} + \frac{(EI^{II})_i}{EI_i} - \frac{4}{s^2} \end{array} \right|$$

if $i = N_{\text{filas}}$

$$\left| \begin{array}{l} M_{c_{i,i-2}} \leftarrow \frac{1}{s^2} - \frac{(EI^I)_i}{s \cdot EI_i} \\ M_{c_{i,i-1}} \leftarrow k_i^2 + 2 \cdot \frac{(EI^I)_i}{s \cdot EI_i} + \frac{(EI^{II})_i}{EI_i} - \frac{4}{s^2} \\ M_{c_{i,i-1}} \leftarrow \frac{7}{s^2} - \frac{2 \cdot (EI^{II})_i}{EI_i} - 2 \cdot k_i^2 \end{array} \right|$$

Armado del Vector de Términos Independientes, Q :

$v_o(x)$ -> Función Imperfección, P -> Esfuerzo Axil

$q_y(x_i)$ -> valor de q_y en la sección de coordenada x_i . El armado de este vector también contempla el caso en el que en la barra actúe una carga $q_y(x)$

$Q := \text{for } i \in 1..N_{\text{filas}}$

$$\left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow i \cdot s \\ I \leftarrow I_z(x_i) \\ Q_i \leftarrow -k^2 \cdot v_o(x_i) \cdot s^2 + 4 \cdot \phi_1 \cdot s \frac{E \cdot I}{4} - \phi_1 \cdot \frac{P}{s} + q \quad \text{if } i = 1 \\ Q_i \leftarrow -k^2 \cdot v_o(x_i) \cdot s^2 - \phi \cdot s \frac{E \cdot I}{4} + q \quad \text{if } i = 2 \\ Q_i \leftarrow -k^2 \cdot v_o(x_i) \cdot s^2 + q \quad \text{otherwise} \end{array} \right.$$

2.a Porcentajes de Error

Para obtener buenas aproximaciones, el número de divisiones del elemento debe ser elevado, 500 o más ($s \leq 2 \% \text{ Long. Barra}$). Llevando al límite las expresiones obtenidas, altura constante y $P = 50 \% \text{ de la } P_{\text{crítica}}$, el error en los elementos de la matriz rigidez es prácticamente nulo (0.3%). Y lo mismo para el error de acciones estáticas.

3. Influencia del Esfuerzo de Corte

Planteo de la ecuación Diferencial teniendo en cuenta la influencia del Corte

α -> coeficiente de forma (para sección rectangular $\alpha = 1.2$)

$$v(x)^{\text{II}} + \frac{d}{dx} \gamma(x) = -\frac{M_z(x)}{EI} \quad (6) \quad \frac{d}{dx} \gamma(x) \quad \text{Curvatura debida a la distorsión } \gamma(x) \text{ provocada por el Esfuerzo de Corte}$$

$$\gamma(x) = \alpha \cdot \frac{Q(x)}{GA} \quad (7) \quad \text{luego} \quad \frac{d}{dx} \gamma(x) = \frac{\alpha}{GA} \cdot \frac{d}{dx} Q(x) = \frac{\alpha}{GA} \cdot q(x) \quad (8)$$

Para el caso en que $q(x) = 0$ $v(x)^{\text{II}} = -\frac{M_z(x)}{EI} \quad (9)$

y la solución de la ecuación diferencial sigue siendo

$$v(x) := C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x) - i_3 \cdot x^3 - i_2 \cdot x^2 + \left(\frac{Q_1}{k^2 \cdot EI} + 6 \cdot \frac{i_3}{k^2} - i_1 \right) \cdot x + \left(\frac{i_2}{k^2} - \frac{M_1}{k^2 \cdot EI} \right) \quad (10)$$

Organiza:

Función Rotación

$$\phi(x) := \frac{d}{dx}v(x) \rightarrow \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 - 3 \cdot i_3 \cdot x^2 - 2 \cdot i_2 \cdot x + \frac{Q_1}{EI \cdot k^2} + C_1 \cdot k \cdot \cos(k \cdot x) - C_2 \cdot k \cdot \sin(k \cdot x) \quad (11)$$

La influencia de la Curvatura de la distorsión debida al Corte será tenida en cuenta al imponer las condiciones de borde, en este caso para sólo la acción de ϕ_1 , rotación Nudo izquierdo

$$v(0) \rightarrow C_2 + \frac{i_2}{k^2} - \frac{M_1}{EI \cdot k^2} \quad v(0) = 0$$

$$\phi(0) \rightarrow \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 + C_1 \cdot k + \frac{Q_1}{EI \cdot k^2} \quad \phi(0) = \phi_1 - \alpha \cdot \frac{Q_1}{GA}$$

$$-\alpha \cdot \frac{Q_1}{GA} = \gamma(0) \quad \text{distorsión debida al Corte en } x = 0$$

$$v(L_0) = 0$$

$$v(L_0) \rightarrow \frac{i_2}{k^2} - L_0^3 \cdot i_3 - L_0^2 \cdot i_2 + C_2 \cdot \cos(L_0 \cdot k) + C_1 \cdot \sin(L_0 \cdot k) + L_0 \cdot \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 + \frac{Q_1}{EI \cdot k^2} \right) - \frac{M_1}{EI \cdot k^2}$$

$$\phi(L_0) \rightarrow \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_0^2 \cdot i_3 - i_1 - 2 \cdot L_0 \cdot i_2 + C_1 \cdot k \cdot \cos(L_0 \cdot k) - C_2 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k) + \frac{Q_1}{EI \cdot k^2}$$

$$\phi(L_0) = -\alpha \cdot \frac{Q_1}{GA} \quad \gamma(L_0) \quad \text{distorsión debida al Corte en } x = L_0$$

Planteo del Sistema de Ecuaciones para Calcular los coeficientes de la Ecuación Diferencial

Matriz de Coeficientes

$$M_c := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{EI \cdot k^2} & 0 \\ k & 0 & 0 & \frac{1}{EI \cdot k^2} + \alpha \cdot \frac{1}{GA} \\ \sin(L_0 \cdot k) & \cos(L_0 \cdot k) & -\frac{1}{EI \cdot k^2} & \frac{L_0}{EI \cdot k^2} \\ k \cdot \cos(L_0 \cdot k) & -k \cdot \sin(L_0 \cdot k) & 0 & \frac{1}{EI \cdot k^2} + \alpha \cdot \frac{1}{GA} \end{pmatrix}$$

Organiza:

Matriz de Coeficientes simplificada

$$M_c := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a & 0 \\ k & 0 & 0 & h \\ s & c & -a & b \\ d & -f & 0 & h \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{1}{EI \cdot k^2} \quad h = \frac{1}{EI \cdot k^2} + \alpha \cdot \frac{1}{GA}$$

$$s = \sin(L_0 \cdot k) \quad c = \cos(L_0 \cdot k) \quad b = \frac{L_0}{EI \cdot k^2}$$

$$d = k \cdot \cos(L_0 \cdot k) \quad f = k \cdot \cos(L_0 \cdot k)$$

Vector Términos Independientes (TI)

Vector Incógnitas

$$C_o = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ M_1 \\ Q_1 \end{pmatrix}$$

$$TI = \begin{pmatrix} \frac{i_2}{k^2} \\ \phi_1 + \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ \frac{i_2}{k^2} - L_0^3 \cdot i_3 - L_0^2 \cdot i_2 + L_0 \cdot \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_0^2 \cdot i_3 - i_1 - 2 \cdot L_0 \cdot i_2 \end{pmatrix}$$

TI Simplificado

$$TI := \begin{pmatrix} -T1 \\ \phi_1 - T2 \\ -T3 \\ -T4 \end{pmatrix}$$

$$M_c \cdot C_o = TI$$

A continuación se edita el vector TI para :

sólo la acción de v1, desplazamiento vertical, Nudo Izquierdo.

$$TI = \begin{bmatrix} v_1 + \frac{i_2}{k^2} \\ \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ \frac{i_2}{k^2} - L_o^3 \cdot i_3 - L_o^2 \cdot i_2 + L_o \cdot \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_o^2 \cdot i_3 - i_1 - 2 \cdot L_o \cdot i_2 \end{bmatrix}$$

sólo la acción de v2, desplazamiento vertical, Nudo derecho.

$$TI = \begin{bmatrix} \frac{i_2}{k^2} \\ \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ v_2 + \frac{i_2}{k^2} - L_o^3 \cdot i_3 - L_o^2 \cdot i_2 + L_o \cdot \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_o^2 \cdot i_3 - i_1 - 2 \cdot L_o \cdot i_2 \end{bmatrix}$$

sólo la acción de ϕ_2 , rotación Nudo derecho

$$TI = \begin{bmatrix} \frac{i_2}{k^2} \\ \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ \left(\frac{i_2}{k^2} - L_o^3 \cdot i_3 - L_o^2 \cdot i_2 \right) + L_o \cdot \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ \phi_2 + \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_o^2 \cdot i_3 - i_1 - 2 \cdot L_o \cdot i_2 \end{bmatrix}$$

sólo la acción de una q = cte a lo largo de la barra.

$$TII := \begin{bmatrix} \left(\frac{2 \cdot i_2}{k^2} - \frac{q}{EI \cdot k^4} \right) \\ \frac{2 \cdot i_2}{k^2} - L_o^3 \cdot i_3 - L_o \cdot \left(i_1 - \frac{6 \cdot i_3}{k^2} \right) - L_o^2 \cdot \left(i_2 - \frac{q}{2 \cdot EI \cdot k^2} \right) - \frac{q}{EI \cdot k^4} \\ \left(\frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 \right) \\ \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_o^2 \cdot i_3 - i_1 - 2 \cdot L_o \cdot \left(i_2 - \frac{q}{2 \cdot EI \cdot k^2} \right) \end{bmatrix}$$

En todos los casos de resolución se ha considerado la rigidez axil en primer orden de la barra de geometría perfecta. De ser necesario tener en cuenta la deformación específica longitudinal al actuar las incógnitas cinemáticas nodales (desplazamientos y rotaciones) se podrá utilizar la expresión (13), página 9¹⁶

$$\varepsilon_x = \frac{\phi(x)^2}{2} + \phi_o(x) \cdot \phi(x) \quad (13)$$

Debido a las extensión de los elementos del vector coeficientes, Co, se editarán solamente los elementos Co3 y Co4 que son el momento flector y el esfuerzo de corte, respectivamente, para el caso en que solo actúa ϕ_1 , rotación en el nudo izquierdo.

$$Q_1 = \frac{6 \cdot EI \cdot GA \cdot \phi_1}{GA \cdot L_o^2 + 12 \cdot EI \cdot \alpha} \quad M_1 = \frac{4 \cdot EI \cdot \phi_1 \cdot (GA \cdot L_o^2 + 3 \cdot EI \cdot \alpha)}{L_o \cdot (GA \cdot L_o^2 + 12 \cdot EI \cdot \alpha)}$$

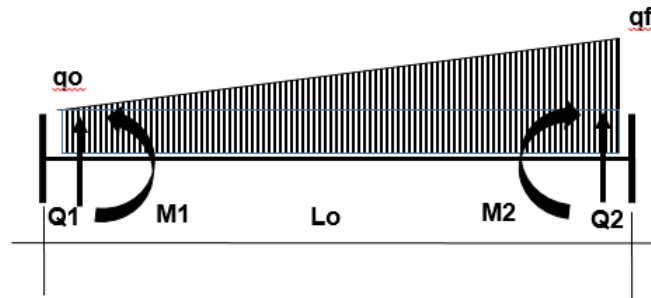
Verifican las expresiones para la solución en primer orden considerando la influencia del Esfuerzo de Corte de la barra de Geometría Perfecta. De no tener en cuenta la influencia del esfuerzo de corte, $\alpha = 0$, las expresiones de Q1, y M1, quedan :

$$Q_1 = \frac{6 \cdot EI}{L_o^2} \cdot \phi_1 \quad M_1 = \frac{4 \cdot EI}{L_o} \cdot \phi_1$$

expresiones del Esfuerzo de Corte y Momento Flector en primer orden, barra de Geometría Perfecta.

Los coeficientes para cada estado de sollicitación fueron calculados en MathCad 14 y en caso de ser requeridos están a entera disposición.

4. Barra BiEmpotrada de Geometría Imperfecta, Inercia Constante, sometida a la acción de una carga Repartida de variación Lineal actuando en toda la longitud.



Función Imperfección

$$v_o(x) := i_3 \cdot x^3 + i_2 \cdot x^2 + i_1 \cdot x \quad (12)$$

$$i_1 = \phi_{o1} \quad i_2 = -\frac{1}{L_o} \cdot (2\phi_{o1} + \phi_{o2}) \quad i_3 = \frac{1}{L_o^2} \cdot (\phi_{o1} + \phi_{o2})$$

**Función Momento
debida a la Cargas
Transversales**

$$M_z(x) := -M_1 + Q_1 \cdot x - q_o \cdot \frac{x^2}{2} - p_q \cdot \frac{x^3}{6} \quad (13) \quad p_q = \frac{q_f - q_i}{L_o}$$

La ecuación diferencial para la barra imperfecta Sometida a una $q = q(x)$ Lineal

$$v''''(x) + k^2 v''(x) = -k^2 v_o(x) - \frac{M_z(x)}{EI} \quad (14)$$

Se reemplaza en el miembro de la derecha $v_o(x)$ por su expresión

$$v_o(x) := i_3 \cdot x^3 + i_2 \cdot x^2 + i_1 \cdot x$$

y se reagrupan términos en función al exponente de x

$$-k^2 v_o(x) - \frac{M_z(x)}{EI} = \left(-k^2 \cdot i_3 + \frac{p_q}{6 \cdot EI} \right) \cdot x^3 + \left(-k^2 \cdot i_2 + \frac{q_o}{2 \cdot EI} \right) \cdot x^2 - \left(k^2 \cdot i_1 + \frac{Q_1}{EI} \right) \cdot x + \frac{M_1}{EI} \quad (15)$$

el miembro de la derecha y la ecuación diferencial, queda

$$v''''(x) + k^2 v''(x) = \left(-k^2 \cdot i_3 + \frac{p_q}{6 \cdot EI} \right) \cdot x^3 + \left(-k^2 \cdot i_2 + \frac{q_o}{2 \cdot EI} \right) \cdot x^2 - \left(k^2 \cdot i_1 + \frac{Q_1}{EI} \right) \cdot x + \frac{M_1}{EI} \quad (16)$$

La solución de la homogénea es la misma que para la perfecta

$$v_h(x) := C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x) \quad (17)$$

Se propone como solución de la particular $v_p(x) := p_3 \cdot x^3 + p_2 \cdot x^2 + p_1 \cdot x + p_0$ (18)

$$\frac{d^2}{dx^2} v_p(x) \rightarrow 2 \cdot p_2 + 6 \cdot p_3 \cdot x \quad (19)$$

Reemplazando en (16) la solución particular, v.p(x) (18)

$$6 \cdot p_3 \cdot x + 2 \cdot p_2 + k^2 \cdot (p_3 \cdot x^3 + p_2 \cdot x^2 + p_1 \cdot x + p_0) = \dots$$

$$\left(-k^2 \cdot i_3 + \frac{p_3}{6 \cdot EI} \right) \cdot x^3 + \left(-k^2 \cdot i_2 + \frac{p_2}{2 \cdot EI} \right) \cdot x^2 - \left(k^2 \cdot i_1 + \frac{p_1}{EI} \right) \cdot x + \frac{p_0}{EI}$$

De esta igualdad se despejan los coeficientes p.i de la solución particular

$$p_0 = \frac{M_1}{EI \cdot k^2} - \frac{q_0}{EI \cdot k^4} + \frac{2 \cdot i_2}{k^2} \quad p_1 = \frac{M_1}{EI \cdot k^2} - \frac{q_0}{EI \cdot k^4} + \frac{2 \cdot i_2}{k^2}$$

$$p_2 = \frac{q_0}{2 \cdot EI \cdot k^2} - i_2 \quad p_3 = \frac{M_1}{EI \cdot k^2} - \frac{q_0}{EI \cdot k^4} + \frac{2 \cdot i_2}{k^2}$$

SOLUCION DE LA HOMOGENEA

$$v_h(x) = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x)$$

SOLUCION DE LA PARTICULAR

$$v_p(x) = p_3 \cdot x^3 + p_2 \cdot x^2 + p_1 \cdot x + p_0$$

SOLUCION GENERAL $v(x) = v_h(x) + v_p(x)$

Se imponen las condiciones de borde y se hallan las expresiones de los coeficientes C.1, C.2, M.1, y Q.1

$$v(0) = 0 = C_2 + \frac{2 \cdot i_2}{k^2} + \frac{M_1}{EI \cdot k^2} - \frac{q_0}{EI \cdot k^4}$$

+

$$v(L_0) = 0 = \frac{2 \cdot i_2}{k^2} - L_0^2 \cdot \left(i_2 - \frac{q_0}{2 \cdot EI \cdot k^2} \right) - L_0^3 \cdot \left(i_3 - \frac{p_q}{6 \cdot EI \cdot k^2} \right) + C_2 \cdot \cos(L_0 \cdot k) +$$

$$+ C_1 \cdot \sin(L_0 \cdot k) - L_0 \cdot \left(i_1 - \frac{6 \cdot i_3}{k^2} + \frac{Q_1}{EI \cdot k^2} + \frac{p_q}{EI \cdot k^4} \right) + \frac{M_1}{EI \cdot k^2} - \frac{q_0}{EI \cdot k^4}$$

$$\phi(0) = 0 = \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 + C_1 \cdot k - \frac{Q_1}{EI \cdot k^2} - \frac{p_q}{EI \cdot k^4}$$

$$\phi(L_0) = 0 = \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_0^2 \cdot \left(i_3 - \frac{p_q}{6 \cdot EI \cdot k^2} \right) - i_1 - 2 \cdot L_0 \cdot \left(i_2 - \frac{q_0}{2 \cdot EI \cdot k^2} \right) +$$

$$+ C_1 \cdot k \cdot \cos(L_0 \cdot k) - C_2 \cdot k \cdot \sin(L_0 \cdot k) - \frac{Q_1}{EI \cdot k^2} - \frac{p_q}{EI \cdot k^4}$$

Matriz Coeficientes

$$M_a := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{EI \cdot k^2} & 0 \\ \sin(L_0 \cdot k) & \cos(L_0 \cdot k) & \frac{1}{EI \cdot k^2} & -\frac{L_0}{EI \cdot k^2} \\ k & 0 & 0 & -\frac{1}{EI \cdot k^2} \\ k \cdot \cos(L_0 \cdot k) & -k \cdot \sin(L_0 \cdot k) & 0 & -\frac{1}{EI \cdot k^2} \end{pmatrix}$$

Organiza:

Vector Términos Independientes

$$T_{IR} := \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot i_2}{k^2} - \frac{q_0}{EI \cdot k^4} \\ \frac{2 \cdot i_2}{k^2} - L_o^2 \cdot \left(i_2 - \frac{q_0}{2 \cdot EI \cdot k^2} \right) - L_o^3 \cdot \left(i_3 - \frac{p_q}{6 \cdot EI \cdot k^2} \right) - L_o \cdot \left(i_1 - \frac{6 \cdot i_3}{k^2} + \frac{p_q}{EI \cdot k^4} \right) - \frac{q_0}{EI \cdot k^4} \\ \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - i_1 - \frac{p_q}{EI \cdot k^4} \\ \frac{6 \cdot i_3}{k^2} - 3 \cdot L_o^2 \cdot \left(i_3 - \frac{p_q}{6 \cdot EI \cdot k^2} \right) - i_1 - 2 \cdot L_o \cdot \left(i_2 - \frac{q_0}{2 \cdot EI \cdot k^2} \right) - \frac{p_q}{EI \cdot k^4} \end{bmatrix}$$

Expresión simplificada del Vector
Términos Independientes!

$$T_{IR} = \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \end{pmatrix}$$

+

Solución del sistema de Ecuaciones $C_o := \text{Isolve}(M_a, -T1)$

Expresiones de los Coeficientes

Por cuestiones de espacio se editan sólo los coeficientes 3, y 4 que representan el momento flector y el corte, respectivamente, en el apoyo izquierdo, expresiones que verifican los valores para la barra de geometría perfecta en primer orden.

$$M_1 = \frac{EI \cdot T3 \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k) - 2 \cdot EI \cdot T2 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - 2 \cdot EI \cdot T1 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 \dots}{4 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k)}$$

+

$$Q_1 = \frac{2 \cdot EI \cdot T3 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 + 2 \cdot EI \cdot T4 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 + EI \cdot T1 \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k) - EI \cdot T2 \cdot k^3 \cdot \sin(L_o \cdot k)}{4 \cdot \sin\left(\frac{L_o \cdot k}{2}\right)^2 - L_o \cdot k \cdot \sin(L_o \cdot k)}$$

Organiza:

5. Conclusiones

Del estudio de la influencia del efecto de las imperfecciones, se ha observado que de no tenerla en cuenta se pueden cometer errores muy grandes tanto en los desplazamientos como en las tensiones normales.

Mediante la solución de barras de inercia variable mediante la aplicación del Método de las Diferencias Finitas Centradas, tanto para acciones estáticas como elásticas, se ha logrado obtener, no solo los valores de los pares y fuerzas extremas de barra para la biempotrada, sino también los valores de la matriz rigidez de geometría imperfecta en segundo orden en régimen elástico. La aplicación del método ha demostrado tener excelentes aproximaciones a los valores exactos cuando se anulan la imperfección y esfuerzo axil, y se han dado los valores de subdivisión de la longitud de la barra, en porcentaje de la longitud, para los cuales se logran esas aproximaciones. Se ha optado por dejar de lado, en esta presentación, la solución de la barra biempotrada, imperfecta en segundo orden, sometida acciones concentradas, por la solución de la barra sometida a una carga de variación lineal, y el efecto de tener en cuenta la influencia del esfuerzo de corte.

6. Próximos Objetivos

Solución de la barra biempotrada, imperfecta y en segundo orden, sometida acciones concentradas

Estudio de la influencia del Esfuerzo de Corte con el fin de establecer los límites de aplicabilidad de la hipótesis de Bernoulli-Navier, en la barra biempotrada, imperfecta y en segundo orden.

7. REFERENCIAS

1. Zienkiewicz OC y Taylor R.L., (1989), *The Finite Element Method – Vol 1 Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill Book Co.
2. Martinez Daniel, (2014) *Implementación del Método de Análisis Directo según AISC para el Análisis de la estabilidad y el diseño de estructuras metálicas esbeltas aporticadas*, Tesis de Maestría en Ingeniería Estructural, UTN FRA Avellaneda, Argentina
3. *-Apuntes de Cátedra Inestabilidad del Equilibrio* de la Maestría en Ingeniería Estructural, Alberto Puppo, FRA UTN, 2009.
4. *Apuntes de Cátedra Estabilidad III* de la carrera de grado de Ingeniería Civil, Verdi, Carlos Alberto, FRA UTN, 198
5. *Investigation into the structural behaviour of portal frame*, Chantal Rudman, Thesis presented in partial fulfillment of the for the degree of Master of Science in Engineering at the University of Stellenbosch, March 2009
6. *Resistencia de Materiales*, Segunda parte, Teoría y Problemas mas Complejos, S. Timoshenko, Espasa Calpe S.A., Madrid 1978.
7. *Stability of bay symmetrical frame with nonuniform members*, F. Irani, Journal of Engineering, Islamic Republic of Iran, 1987.
8. *Resistencia de materiales*, V. I. Feodosiev, Ediciones Sapiens, Buenos Aires, Argentina, 1976.

- 9 *Effects of nonverticality on Steel Framing Systems, Implications for Design*, Andrea E. Suroveak and Justin Johnson, Engineering Journal, First quarter, 2008.
- 10 *Stability Analysis and the 2005 AISC Specification*, Shankar Nair, Modern steel construction, May 2007
- 11 *CIRSOC 301*, Reglamento argentino de estructuras de acero para edificios, INTI CIRSOC, Buenos Aires, Argentina, 2005.
- 12 *CIRSOC 301*, Comentarios al Reglamento argentino de estructuras de acero para edificios, INTI CIRSOC, Buenos Aires, Argentina, 2005.
- 13 *ANSI/AISC 360-05*, Specification for structural steel building, American Institute of Steel Construction, Chicago USA, 2005.
- 14 *Eurocode 3*, Design of steel structures. General rules and rules for buildings, Europa 2005.
- 15 *ABNT NBR 8800*, Projeto de estruturas de aço e concreto de edificios, Brasil, 2008.
- 16 Matriz rigidez del elemento de barra de geometría imperfecta teniendo en cuenta la influencia del esfuerzo axial, 28° Jornadas AIE, Autores : Martinez Daniel, Sarpero Carlos Jorge