

UN MÉTODO DIRECTO CON APROXIMACIONES ASINTÓTICAS PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS METÁLICAS APORTICADAS

(¹)Dr. Ing. Jouglard, Claudio e (²)Ing. Civil Termine, Ezequiel

Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional Buenos Aires. UTN.

(¹)claudio.jouglard@frba.utn.edu.ar y (²)ezequiel.m.termine@gmail.com

Palabras clave: estabilidad, método directo, aproximaciones asintóticas

RESUMEN

Las normas actuales de análisis estructural especifican que las estructuras de acero deben analizarse mediante métodos rigurosos de segundo orden. El equilibrio debe establecerse en la configuración deformada, contabilizando tanto los efectos $P-\Delta$ como $P-\delta$. Esto requiere resolver un sistema de ecuaciones no lineales de forma incremental para distintos niveles de carga. Típicamente, se emplea el método de Newton-Raphson; sin embargo, su costo computacional es significativo debido a la gran cantidad de sistemas lineales que deben resolverse en cada paso incremental.

Por el contrario, los métodos asintóticos se basan en series de potencias (series de Taylor), donde la respuesta estructural se expresa de forma polinomial —mediante aproximaciones lineales, cuadráticas o cúbicas— en función de un desplazamiento característico. Este enfoque requiere resolver solo un sistema lineal por cada orden de aproximación. Si la no linealidad es moderada —como es frecuente en estructuras de pórticos— una aproximación cúbica suele ser suficiente, requiriendo la resolución de solo tres sistemas lineales. Este estudio presenta comparaciones con métodos tradicionales y evalúa su eficiencia computacional.

ABSTRACT

Current structural analysis standards specify that steel structures must be analyzed using rigorous second-order methods. Equilibrium must be established in the deformed configuration, accounting for both $P-\Delta$ and $P-\delta$ effects. This necessitates solving a system of nonlinear equations incrementally across various load levels. Typically, the Newton-Raphson method is employed; however, its computational cost is significant due to the large number of linear systems that must be solved at each incremental step.

Asymptotic methods, conversely, are based on power series (Taylor series), where the structural response is expressed by polynomials—via linear, quadratic, or cubic approximations—as a function of a characteristic displacement. This approach requires solving only one linear system for each order of approximation. If the nonlinearity is moderate—as is common in frame structures—a cubic approximation is often sufficient, requiring the solution of only three linear systems. This study presents comparisons with traditional methods and evaluates their computational efficiency.

INTRODUCCIÓN

La creciente demanda de estructuras metálicas cada vez más esbeltas ha incrementado la importancia de considerar los efectos de segundo orden en el análisis y diseño estructural. En este tipo de estructuras, las deformaciones producidas por las cargas aplicadas modifican la configuración geométrica del sistema, alterando su rigidez y generando esfuerzos adicionales que pueden afectar significativamente tanto la resistencia como la estabilidad global. Como consecuencia, las principales normas internacionales de diseño^{1,2,3} incorporan actualmente procedimientos que consideran explícitamente la no linealidad geométrica en la evaluación del comportamiento estructural.

En las últimas décadas, el enfoque de diseño ha evolucionado desde métodos basados en longitudes efectivas y factores de amplificación de momentos hacia procedimientos fundamentados en el denominado *Método de Análisis Directo* (MAD)^{1,2}, adoptado por diversas especificaciones modernas para el diseño de estructuras de acero. Este método integra en un único análisis los efectos de segundo orden, las imperfecciones geométricas equivalentes y la reducción de rigidez asociada a la inestabilidad, proporcionando una representación más realista del comportamiento estructural y eliminando la necesidad de numerosas verificaciones independientes de estabilidad.

Desde el punto de vista numérico, la consideración de la no linealidad geométrica conduce a un problema de equilibrio no lineal, cuya resolución suele abordarse mediante procedimientos incrementales e iterativos, como los algoritmos de Newton-Raphson con control de carga o de desplazamiento. Aunque estos procedimientos constituyen la herramienta estándar en programas generales de análisis por elementos finitos, su implementación implica una complejidad computacional considerable, especialmente cuando el objetivo es el análisis rutinario de edificios de acero dentro del rango esencialmente elástico previsto por los reglamentos de diseño. En muchos casos, la mayor parte del esfuerzo computacional se destina al seguimiento de la trayectoria de equilibrio mediante múltiples incrementos de carga, aun cuando la respuesta estructural permanece alejada de fenómenos altamente no lineales como la plastificación extensa o las inestabilidades por bifurcación.

Sin embargo, en el contexto del análisis elástico de segundo orden requerido por los métodos directos de diseño, la trayectoria completa de carga no resulta necesariamente indispensable. Cuando la respuesta estructural es estable y la única

fuerza significativa de no linealidad proviene de la dependencia de la rigidez respecto de la geometría deformada, el problema puede formularse directamente para el estado final de cargas, resolviendo únicamente las iteraciones de equilibrio necesarias para alcanzar la configuración deformada compatible con dicho estado. Este enfoque permite capturar los efectos geométricos de segundo orden sin recurrir a un procedimiento incremental, reduciendo significativamente el costo computacional y simplificando la implementación del algoritmo.

Diversos programas comerciales de análisis estructural incorporan estrategias de este tipo para el cálculo de edificios, aunque los fundamentos matemáticos y las limitaciones de estos procedimientos rara vez se presentan de manera explícita en la literatura técnica. En consecuencia, existe un interés creciente por desarrollar formulaciones simplificadas que conserven la precisión requerida por los métodos directos de diseño, pero que eviten la complejidad inherente a los algoritmos incrementales convencionales.

En este trabajo se presenta un procedimiento simplificado para el análisis geoméricamente no lineal de estructuras metálicas basado en series de potencias para obtener la solución de equilibrio bajo el estado final de cargas, sin subdividir el proceso de aplicación de las acciones en incrementos ni usar correcciones iterativas. Si bien la solución de problemas de inestabilidad y no linealidad geométrica mediante series de potencias se conoce desde hace varios años^{4,5,6} no ha sido implementado en software comercial.

La formulación incorpora la rigidez geométrica derivada de los esfuerzos axiales y permite evaluar de manera eficiente los efectos globales de segundo orden requeridos por el método directo de diseño. El algoritmo propuesto se desarrolla dentro del marco del análisis elástico y está orientado a aplicaciones habituales en estructuras aporticadas de acero. Su desempeño se evalúa mediante un ejemplo representativo, comparando los resultados obtenidos con soluciones incrementales convencionales y analizando tanto la precisión como la eficiencia computacional del procedimiento.

ECUACIONES DE EQUILIBRIO NO LINEALES

Consideremos un sistema estructural donde las cargas son proporcionales a un parámetro de cargas λ , esto es, todas las cargas se incrementan o disminuyen de manera proporcional a este parámetro (figura 1).

Asumiremos que la estructura se comporta elásticamente y que las deformaciones y desplazamientos son pequeños y que las cargas no modifican su dirección durante su aplicación, esto es, el sistema es conservativo.

Además, el equilibrio del sistema se plantea en la configuración deformada (efectos

de segundo orden) donde las fuerzas internas generadas por la deformación de la estructura deben equilibrar a las fuerzas externas aplicadas.

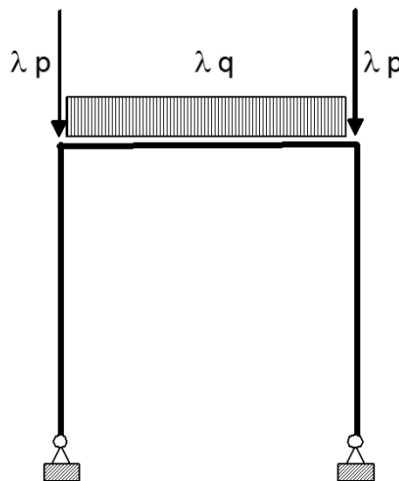


Figura 1. Sistema estructural y cargas

Bajo la acción de las cargas, el sistema estructural se deforma adoptando diferentes configuraciones deformadas definidas por las componentes u_i de un vector de desplazamientos $\mathbf{u}$ (figura 2).

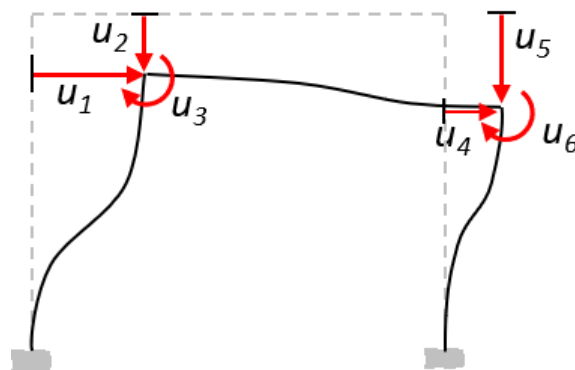


Figura 2. Estructura deformada

Bajo las condiciones asumidas la energía potencial del sistema se puede expresar como

$$V(\mathbf{u}, \lambda) = U(\mathbf{u}) - \lambda W(\mathbf{u}) \quad (1)$$

Donde U representa la energía de deformación, W el potencial de las cargas externas y $\mathbf{u}$ es el vector de desplazamientos.

De acuerdo con el principio de mínima energía potencial⁷ para que exista equilibrio estático la energía potencial debe ser mínima, por lo tanto, debe verificarse que las derivadas de la energía potencial $V(\mathbf{u}, \lambda)$ respecto de cada desplazamiento u_i debe ser nula, esto es

$$V_{,i} = \frac{\partial V}{\partial u_i} = \frac{\partial U}{\partial u_i} - \lambda \frac{\partial W}{\partial u_i} = 0 \quad (2)$$

Agrupando todas estas ecuaciones en un vector, tenemos

$$\mathbf{V}_{\mathbf{u}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial u_1} \quad \frac{\partial V}{\partial u_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial u_n} \right\}^T \quad (3)$$

donde hemos indicado al vector de derivadas parciales respecto de los desplazamientos con un subíndice $\mathbf{u}$ en negrita significando que debemos derivar respecto de desplazamiento individual y que el resultado será un vector.

Luego, las ecuaciones de equilibrio quedan

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{V}_{\mathbf{u}} = \mathbf{U}_{\mathbf{u}} - \lambda \mathbf{W}_{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Definimos al vector de *fuerzas internas* $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ asociado a la energía de deformación U como

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{U}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \quad (5)$$

De manera similar definimos un vector $\mathbf{p}$ de *fuerzas externas* de referencia asociado al trabajo de las fuerzas externas W como

$$\mathbf{p} = \mathbf{W}_{\mathbf{u}} \quad (6)$$

Notemos que las componentes del vector $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ son en general funciones no lineales de los desplazamientos (para problemas con no linealidad geométrica) y el vector $\mathbf{p}$ es constante.

Luego, las ecuaciones de equilibrio quedan

$$\boxed{\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0}} \quad (7)$$

Las soluciones $\mathbf{u}, \lambda$ de estas ecuaciones son, en general, curvas que se representan en *diagramas de respuestas* que muestran la variación del parámetro de cargas λ con un desplazamiento u_i particular. Estas curvas se llaman *camino de equilibrio* ya que cada punto de la curva representa una configuración de equilibrio del sistema.

En la figura 3 tenemos un diagrama de respuesta para un comportamiento moderadamente no lineal y hemos graficado la respuesta lineal. La respuesta lineal se obtiene asumiendo que la fuerza interna $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ tiene la forma lineal

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_0 \mathbf{u} \quad (8)$$

donde $\mathbf{K}_0$ es la clásica matriz de rigidez lineal^{7,8} calculada en el origen ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$).

Para obtener la solución de la ecuación no lineal (7) en general, se utilizan

procedimientos incrementales e iterativos, como los algoritmos de Newton-Raphson con control de carga o de desplazamiento

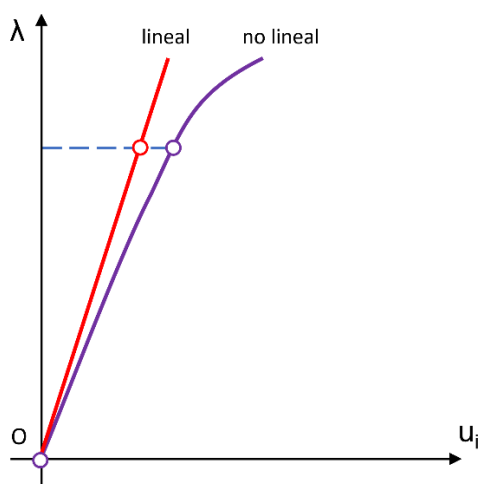


Figura 3. Diagrama de respuesta

EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Este es el método utilizado por la mayoría de los programas de análisis no lineal general de estructuras. Para su análisis consideremos la figura 4

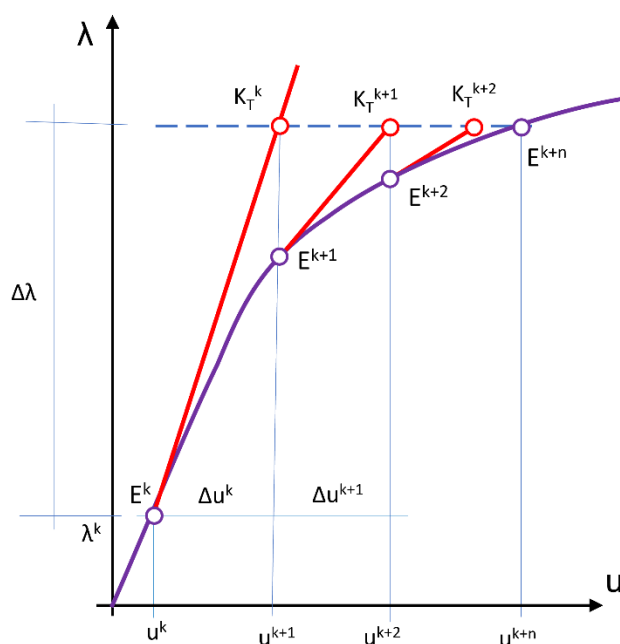


Figura 4. Método de Newton-Raphson

Supongamos que conocemos la configuración de equilibrio E^k , correspondiente a los valores $(\mathbf{u}^k, \lambda^k)$ y deseamos conocer la configuración de equilibrio en $(\mathbf{u}^{k+n}, \lambda^k + \Delta\lambda^k)$, esto es, en un punto situado un incremento $\Delta\lambda^k$ por encima del valor conocido. Este incremento debe ser suministrado por el usuario y debemos calcular $\mathbf{u}^{k+n}$.

Si desarrollamos en series de Taylor de los desplazamientos al residuo en (7) y retenemos hasta términos lineales resulta:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}, \lambda^k + \Delta\lambda^k) = \mathbf{r}(\mathbf{u}^k, \lambda^k) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_k \Delta\mathbf{u} \approx \mathbf{0} \quad (9)$$

Como el residuo debe ser nulo en la nueva posición, de esta ecuación podemos obtener $\Delta\mathbf{u}$ como:

$$\mathbf{K}_T^k \Delta\mathbf{u} = -\mathbf{r}(\mathbf{u}^k, \lambda^k) \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{K}_T^k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_k \quad (11)$$

es la *matriz de rigidez tangente* en la configuración k .

Una vez conocida la corrección $\Delta\mathbf{u}$ podemos actualizar los desplazamientos y al cabo de n correcciones tendremos

$$\mathbf{u}^{k+n} = \mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}^{k+1} + \Delta\mathbf{u}^{k+2} + \dots \quad (12)$$

El método de Newton-Raphson es un método predictor-corrector sumamente costoso, pues es necesario resolver un sistema de ecuaciones por cada predicción y cada corrección, además se debe reconstruir la matriz de rigidez tangente en cada corrección.

EL MÉTODO DE APROXIMACIONES ASINTÓTICAS

Los caminos de equilibrio se pueden representar de forma paramétrica mediante funciones $\mathbf{u}(t), \lambda(t)$ de un cierto parámetro t que mide el avance sobre la curva. En general, no es posible encontrar una expresión explícita cerrada de estas funciones y se debe recurrir a su representación por series de potencias de t como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{[0]} + \mathbf{u}^{[1]}t + \mathbf{u}^{[2]}t^2 + \mathbf{u}^{[3]}t^3 + \dots \quad (13.a)$$

$$\lambda(t) = \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]}t + \lambda^{[2]}t^2 + \lambda^{[3]}t^3 + \dots \quad (13.b)$$

donde hemos indicado al i -ésimo coeficiente de cada serie con un índice superior entre corchetes y los primeros términos $(\mathbf{u}^{[0]}, \lambda^{[0]}) = (\mathbf{u}^E, \lambda^E)$ corresponden a una configuración de equilibrio E conocida, y los restantes términos se pueden expresar

como:

$$\mathbf{u}^{[m]} = \frac{1}{m!} \mathbf{u}^{(m)} \Big|_{t=0} \quad (14.a)$$

$$\lambda^{[m]} = \frac{1}{m!} \lambda^{(m)} \Big|_{t=0} \quad (14.b)$$

donde hemos indicado a la m-ésima derivada con un índice superior entre paréntesis:

$$\mathbf{u}^{(m)} = \frac{d^m \mathbf{u}}{dt^m} \quad (15.a)$$

$$\lambda^{(m)} = \frac{d^m \lambda}{dt^m} \quad (15.b)$$

En la figura 5 se muestran las aproximaciones asintóticas obtenidas para diferentes truncamientos de las series.

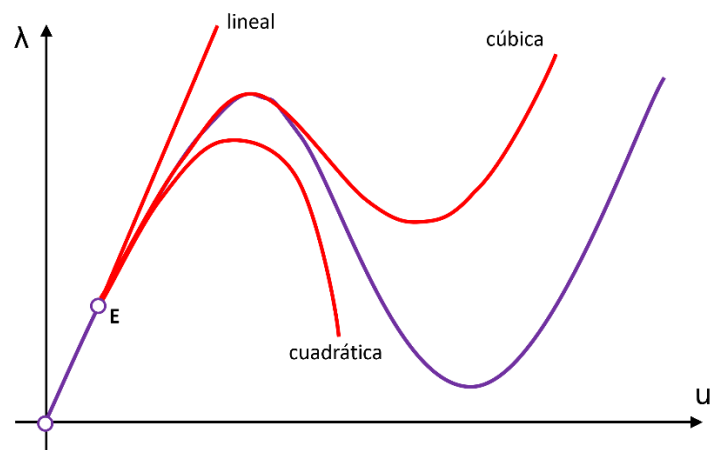


Figura 5. Aproximaciones asintóticas

Para obtener las componentes $(\mathbf{u}^{[m]}, \lambda^{[m]})$ debemos derivar paramétricamente reiteradas veces a la ecuación de equilibrio residual y expresar estas derivadas en la configuración E de origen de la serie. Aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{f}_u \mathbf{u}^{(1)} - \lambda^{(1)} \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (16.a)$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{f}_u \mathbf{u}^{(2)} - \lambda^{(2)} \mathbf{p} + \mathbf{f}_u^{(1)} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{0} \quad (16.b)$$

$$\mathbf{r}^{(3)} = \mathbf{f}_u \mathbf{u}^{(3)} - \lambda^{(3)} \mathbf{p} + \mathbf{f}_u^{(1)} \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{f}_u^{(2)} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{0} \quad (16.c)$$

Evaluando en el origen E de las series, y dividiendo la m-ésima ecuación por m! tenemos

$$\mathbf{K}_T^E \mathbf{u}^{[1]} = \lambda^{[1]} \mathbf{p} \quad (17.a)$$

$$\mathbf{K}_T^E \mathbf{u}^{[2]} = \lambda^{[2]} \mathbf{p} - \mathbf{g}^{[2]} \quad (17.b)$$

$$\mathbf{K}_T^E \mathbf{u}^{[3]} = \lambda^{[3]} \mathbf{p} - \mathbf{g}^{[3]} \quad (17.c)$$

donde $\mathbf{K}_T^E$ es la *matriz de rigidez tangente* en E esto es

$$\mathbf{K}_T^E = \mathbf{f}_u|_E = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}|_E \quad (18)$$

Además, los vectores $\mathbf{g}^{[2]}, \mathbf{g}^{[3]}$, llamados *vectores de fuerzas geométricas* son

$$\mathbf{g}^{[2]} = \frac{1}{2} \mathbf{K}_T^{[1]} \mathbf{u}^{[1]} \quad (19.a)$$

$$\mathbf{g}^{[3]} = \frac{2}{3} \mathbf{K}_T^{[1]} \mathbf{u}^{[2]} + \frac{2}{3} \mathbf{K}_T^{[2]} \mathbf{u}^{[1]} \quad (19.b)$$

siendo las *matrices de rigidez tangente de m-ésimo orden*, definidas como:

$$\mathbf{K}_T^{[1]} = \mathbf{f}_u^{(1)}|_E = \mathbf{f}_u^{[1]} \quad (20.a)$$

$$\mathbf{K}_T^{[2]} = \frac{1}{2} \mathbf{f}_u^{(2)}|_E = \mathbf{f}_u^{[2]} \quad (20.b)$$

Estas expresiones son genéricas y fueron derivadas en la referencia [6]. Su forma definitiva dependerá de cómo esté expresada la energía de deformación $U(\mathbf{u})$.

Notemos que cada una de las ecuaciones (17) tiene n ecuaciones con n+1 incógnitas que son las n componentes de $\mathbf{u}^{[m]}$ y una incógnita adicional $\lambda^{[m]}$. Luego es necesaria una ecuación adicional para determinar todas las incógnitas. Dicha ecuación es la que define el parámetro t del camino, en este caso adoptamos la longitud de arco circunferencial⁶ como parámetro que implica que en todo punto del camino de equilibrio debe verificarse

$$\mathbf{u}^{(1)T} \mathbf{u}^{(1)} = 1 \quad (21)$$

Esta condición asegura que las series de Taylor sean siempre convergentes y geoméricamente significa que el vector tangente tiene módulo unitario en desplazamientos en cada punto. Luego debemos verificar que se cumplan estas condiciones adicionales:

$$\mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[1]} = 1 \quad (22.a)$$

$$\mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[2]} = 0 \quad (22.b)$$

$$\mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[3]} = -\frac{2}{3} \mathbf{u}^{[2]T} \mathbf{u}^{[2]} \quad (22.c)$$

Elemento finito con rotaciones moderadas

Consideremos un elemento finito de viga con desplazamientos u_i, v_i, θ_i en sus extremos, como se muestra en la figura 6

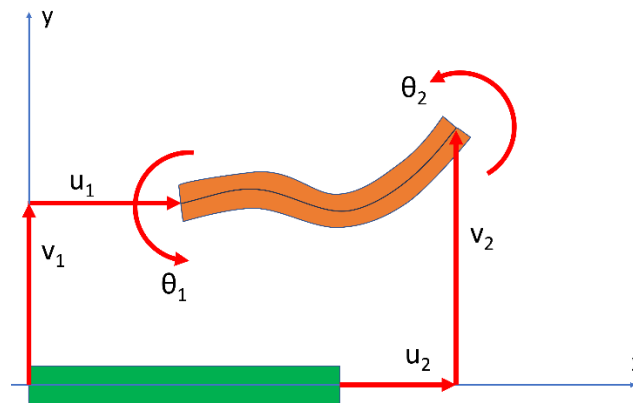


Figura 6. Elemento finito de viga

Considerando pequeñas deformaciones, grandes desplazamientos, pero rotaciones moderadas, es posible expresar las deformaciones mediante las componentes del tensor de Green-Lagrange⁶ y asumiendo las hipótesis usuales para vigas de mantenimiento de secciones planas, luego sólo son relevantes las deformaciones normales al plano de la sección y la única componente de deformación a considerar es ϵ_{xx} que vale

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

donde u, v son los desplazamientos longitudinales y transversales del eje centroidal x y z es un eje principal de la sección normal al eje de la viga.

Luego la energía de deformación de la viga es

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E (\epsilon_{xx})^2 dA dx = 0 \quad (24)$$

Se puede demostrar^{6,9} que después de integrar la energía de deformación del elemento finito (adoptando las clásicas funciones cúbicas y lineales para interpolar desplazamientos) se puede expresar como

$$U = \mathbf{d}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{K}_0 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\mathbf{d}) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \right) \mathbf{d} \quad (25)$$

donde $\mathbf{d}$ son los desplazamientos nodales y las matrices $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1(\mathbf{d}), \mathbf{K}_2(\mathbf{d}, \mathbf{d})$ son, respectivamente, constantes, lineales, y cuadráticas en los desplazamientos nodales y se encuentran definidas en el apéndice.

Matrices y vectores para aproximaciones asintóticas

Sumando todas las energías de deformación para todos los elementos tenemos que la energía de deformación de toda la estructura se puede escribir como

$$U = \mathbf{u}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{K}_0 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\mathbf{u}) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right) \mathbf{u} \quad (26)$$

Luego el vector de fuerzas internas $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ se puede escribir como

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = U_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \left(\mathbf{K}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right) \mathbf{u} \quad (27)$$

donde la matriz entre paréntesis es la *matriz de rigidez secante*⁶ $\mathbf{K}_s(\mathbf{u})$

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (28)$$

que es una función no lineal de los desplazamientos $\mathbf{u}$.

Luego, con esta matriz, las ecuaciones de equilibrio se pueden escribir alternativamente como:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{K}_s(\mathbf{u}) \mathbf{u} - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (29)$$

La matriz de rigidez tangente se obtiene derivando el vector de fuerzas internas

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{f}_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (30)$$

Notemos la semejanza con la matriz de rigidez secante de donde se puede deducir que tiene el mismo costo computacional, sin embargo, como veremos a continuación solo calcularemos la matriz de rigidez tangente en el origen ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) que coincide con la matriz $\mathbf{K}_0$.

Para los vectores de fuerzas geométricas $\mathbf{g}^{[2]}, \mathbf{g}^{[3]}$ necesitamos las matrices de rigidez tangente de m-ésimo orden $\mathbf{K}_T^{[1]}, \mathbf{K}_T^{[2]}$, que en el caso particular de ser evaluadas en el origen ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) quedan⁶

$$\mathbf{K}_T^{[1]} = \mathbf{K}_1(\mathbf{u}^{[1]}) \quad (31.a)$$

$$\mathbf{K}_T^{[2]} = \mathbf{K}_1(\mathbf{u}^{[2]}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_2(\mathbf{u}^{[1]}, \mathbf{u}^{[1]}) \quad (31.b)$$

Ahora, tenemos todos los componentes necesarios para hacer un análisis asintótico.

Implementación de la aproximación asintótica

Los pasos para implementar el cálculo con esta metodología son los siguientes:

Paso 1: debemos armar la matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T^0$ evaluada en el origen

$$\mathbf{K}_T^0 = \mathbf{K}_0 \quad (32)$$

Paso 2: calculamos las componentes $\mathbf{u}^{[1]}, \lambda^{[1]}$ usando las ecs. (17.a) y (22.a)

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}^{[1]} = \lambda^{[1]} \mathbf{p} \quad (33.a)$$

$$\mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[1]} = 1 \quad (33.b)$$

Primero resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones para hallar el vector δ_1

$$\mathbf{K}_0 \delta_1 = \mathbf{p} \quad (34)$$

Por lo tanto, de la ec.(33.a), el vector $\mathbf{u}^{[1]}$ queda definido como

$$\mathbf{u}^{[1]} = \lambda^{[1]} \delta_1 \quad (35)$$

Sustituyendo en la ec. (33.b) encontramos que

$$\lambda^{[1]} = \frac{1}{\sqrt{\delta_1^T \delta_1}} \quad (36)$$

Paso 3: calculamos las componentes $\mathbf{u}^{[2]}, \lambda^{[2]}$ usando las ecs. (17.b) y (22.b)

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}^{[2]} = \lambda^{[2]} \mathbf{p} - \mathbf{g}^{[2]} \quad (37.a)$$

$$\mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[2]} = 0 \quad (37.b)$$

Primero calculamos la matriz $\mathbf{K}_T^{[1]}$ de la ec.(31.a) como

$$\mathbf{K}_T^{[1]} = \mathbf{K}_1(\mathbf{u}^{[1]}) \quad (38)$$

Luego calculamos el vector de fuerzas geométricas $\mathbf{g}^{[2]}$ de la ec.(19.a) como

$$\mathbf{g}^{[2]} = \frac{1}{2} \mathbf{K}_T^{[1]} \mathbf{u}^{[1]} \quad (39)$$

Ahora resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones para hallar el vector δ_2

$$\mathbf{K}_0 \boldsymbol{\delta}_2 = \mathbf{g}^{[2]} \quad (40)$$

Luego, de la ec.(37.a), la componente $\mathbf{u}^{[2]}$ se puede expresar como

$$\mathbf{u}^{[2]} = \lambda^{[2]} \boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_2 \quad (41)$$

Sustituyendo en la ec. (37.b) encontramos que

$$\mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[2]} = \frac{\lambda^{[2]}}{\lambda^{[1]}} \mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[1]} - \mathbf{u}^{[1]T} \boldsymbol{\delta}_2 = 0 \quad (42)$$

Como el vector $\mathbf{u}^{[1]}$ tiene módulo unitario, ec.(33.b), entonces resulta

$$\lambda^{[2]} = \lambda^{[1]} \mathbf{u}^{[1]T} \boldsymbol{\delta}_2 \quad (43)$$

Finalmente, de la ec.(41) tenemos que

$$\mathbf{u}^{[2]} = \frac{\lambda^{[2]}}{\lambda^{[1]}} \mathbf{u}^{[1]} - \boldsymbol{\delta}_2 \quad (44)$$

Paso 4: calculamos las componentes $\mathbf{u}^{[3]}$, $\lambda^{[3]}$ usando las ecs. (17.c) y (22.c)

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}^{[3]} = \lambda^{[3]} \mathbf{p} - \mathbf{g}^{[3]} \quad (45.a)$$

$$\mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[3]} = -\frac{2}{3} \mathbf{u}^{[2]T} \mathbf{u}^{[2]} \quad (45.b)$$

Primero calculamos la matriz $\mathbf{K}_T^{[2]}$ de la ec.(31.b) como

$$\mathbf{K}_T^{[2]} = \mathbf{K}_1(\mathbf{u}^{[2]}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_2(\mathbf{u}^{[1]}, \mathbf{u}^{[1]}) \quad (46)$$

Luego calculamos el vector de fuerzas geométricas $\mathbf{g}^{[3]}$ de la ec.(19.b) como

$$\mathbf{g}^{[3]} = \frac{2}{3} \mathbf{K}_T^{[1]} \mathbf{u}^{[2]} + \frac{2}{3} \mathbf{K}_T^{[2]} \mathbf{u}^{[1]} \quad (47)$$

Ahora resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones para hallar el vector $\boldsymbol{\delta}_3$

$$\mathbf{K}_0 \boldsymbol{\delta}_3 = \mathbf{g}^{[3]} \quad (48)$$

Luego, de la ec.(45.a), la componente $\mathbf{u}^{[3]}$ se puede expresar como

$$\mathbf{u}^{[3]} = \lambda^{[3]} \boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_3 \quad (49)$$

Sustituyendo en la ec. (45.b) encontramos que

$$\mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[3]} = \frac{\lambda^{[3]}}{\lambda^{[1]}} \mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[1]} - \mathbf{u}^{[1]T} \boldsymbol{\delta}_3 = -\frac{2}{3} \mathbf{u}^{[2]T} \mathbf{u}^{[2]} \quad (50)$$

Como el vector $\mathbf{u}^{[1]}$ tiene módulo unitario, ec.(33.b), entonces resulta

$$\lambda^{[3]} = \lambda^{[1]} \left(\mathbf{u}^{[1]T} \boldsymbol{\delta}_3 - \frac{2}{3} \mathbf{u}^{[2]T} \mathbf{u}^{[2]} \right) \quad (51)$$

Finalmente, de la ec.(49) tenemos que

$$\mathbf{u}^{[3]} = \frac{\lambda^{[3]}}{\lambda^{[1]}} \mathbf{u}^{[1]} - \boldsymbol{\delta}_3 \quad (52)$$

Paso 5: Las aproximaciones asintóticas hasta términos cúbicos quedan

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{[0]} + \mathbf{u}^{[1]}t + \mathbf{u}^{[2]}t^2 + \mathbf{u}^{[3]}t^3 \quad (53.a)$$

$$\lambda(t) = \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]}t + \lambda^{[2]}t^2 + \lambda^{[3]}t^3 \quad (53.b)$$

Para un dado nivel de carga, por ejemplo $\lambda = \lambda_p$, calculamos el parámetro t_p resolviendo la ecuación cúbica:

$$\lambda^{[0]} + \lambda^{[1]}t_p + \lambda^{[2]}t_p^2 + \lambda^{[3]}t_p^3 = \lambda_p \quad (54)$$

Esta ecuación tiene tres soluciones y elegimos la menor t_p real positiva.

Luego podemos calcular los desplazamientos para este parámetro t_p como:

$$\mathbf{u}(t_p) = \mathbf{u}^{[0]} + \mathbf{u}^{[1]}t_p + \mathbf{u}^{[2]}t_p^2 + \mathbf{u}^{[3]}t_p^3 \quad (55)$$

Finalmente, con los desplazamientos podemos calcular los esfuerzos en todas las barras.

METODOLOGÍA SIMPLIFICADA USADA EN PROGRAMAS COMERCIALES

Muchos programas comerciales implementan un método iterativo simplificado para no usar el método de Newton-Raphson en los análisis P-Δ. La idea es resolver iterativamente la ecuación de equilibrio (29) usando la matriz de rigidez *secante* $\mathbf{K}_s(\mathbf{u})$.

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{K}_s(\mathbf{u}) \mathbf{u} - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (56)$$

Supongamos que queremos conocer los desplazamientos $\mathbf{u}_p$ para un cierto nivel de cargas $\lambda = \lambda_p$, entonces debemos resolver la ecuación

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{u}_p) \mathbf{u}_p = \lambda_p \mathbf{p} \quad (57)$$

El problema con esta ecuación es que como no conocemos $\mathbf{u}_p$ no podemos calcular la matriz de rigidez secante $\mathbf{K}_s(\mathbf{u}_p)$. Luego lo que hacen estos programas es aproximar

el valor $\mathbf{u}_p$ iterativamente mediante aproximaciones $\mathbf{u}_p^i$ comenzando con $\mathbf{u}_p^0$ calculado como

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_p^0 = \lambda_p \mathbf{p} \quad (58)$$

A partir de aquí se pueden obtener mejores aproximaciones $\mathbf{u}_p^{i+1}$ mediante la fórmula de recursión

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{u}_p^i) \mathbf{u}_p^{i+1} = \lambda_p \mathbf{p} \quad (59)$$

El proceso finaliza cuando se alcanza una cierta tolerancia tol en el desequilibrio de fuerzas relativas, esto es:

$$\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{u}_p^{i+1}, \lambda_p)\|}{\|\mathbf{p}\|} = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}}{\mathbf{p}^T \mathbf{p}} \leq tol \quad (60)$$

Este procedimiento presenta varias desventajas, a saber

- 1) No tiene garantía de convergencia. Si la aproximación inicial $\mathbf{u}_p^0$ no está suficientemente cerca de la solución exacta $\mathbf{u}_p$ el método puede divergir.
- 2) En cada paso de iteración es necesario reconstruir la matriz secante $\mathbf{K}_s(\mathbf{u}_p^i)$ lo cual puede ser sumamente costoso computacionalmente dado que en general la forma de esta matriz puede ser bastante compleja (como se ve en la ec.(28)).
- 3) La precisión del método depende de la tolerancia tol especificada. Para ciertos problemas una tolerancia muy baja puede resultar en una demanda de tiempo de cálculo excesiva. En otros casos, una tolerancia alta puede llevar a resultados imprecisos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN: PÓRTICO PLANO

Consideremos un pórtico plano formado por perfiles IPE 220 con una carga distribuida de 2 kN/m sobre el dintel y una fuerza horizontal de 20 kN en la cabeza de la columna izquierda.

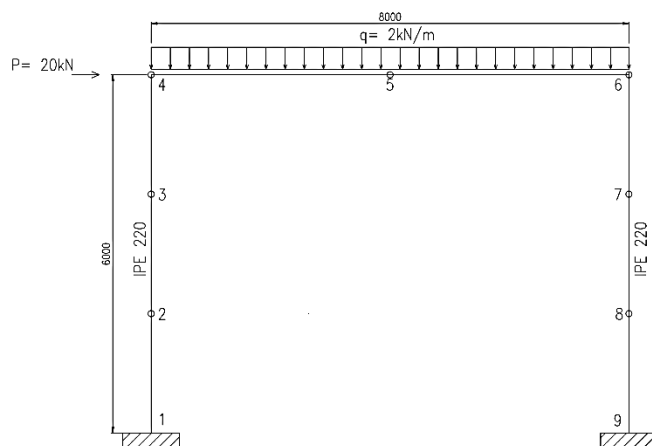


Figura 7. Pórtico de ejemplo

Siguiendo el procedimiento de cálculo se computaron las componentes del camino de equilibrio hasta términos cúbicos.

En la figura 8 se muestran los desplazamientos horizontales en la cabeza de la columna izquierda. Con líneas llenas se muestran los desplazamientos asintóticos y los puntos los valores obtenidos por Newton-Raphson.

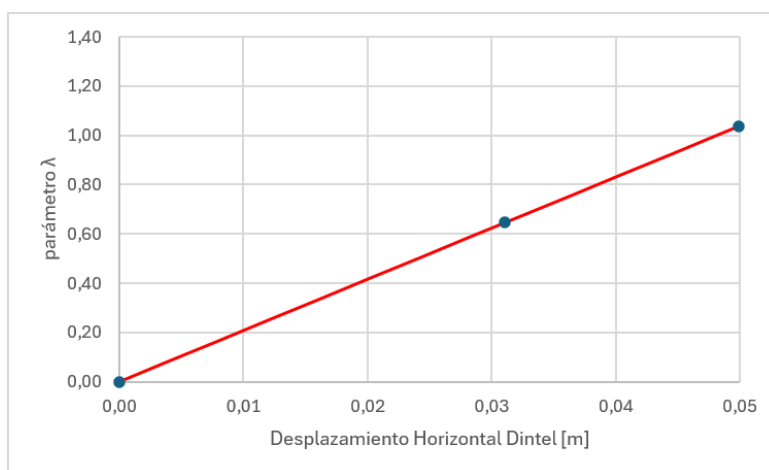


Figura 8. Desplazamiento Horizontal

En la figura 9 se muestran los diagramas de momentos de primer orden a la izquierda obtenidos mediante las matrices convencionales de rigidez y a la derecha los diagramas de momentos de segundo orden obtenidos con la matriz de rigidez secante. Ambos diagramas corresponden a un factor de cargas $\lambda_p = 1$.

Se puede apreciar una diferencia de alrededor del 10% entre ambos diagramas.

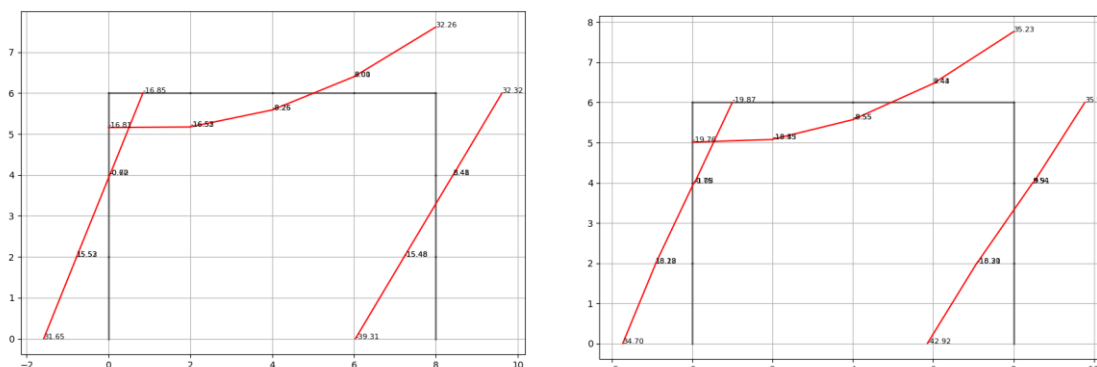


Figura 9. Diagramas de momentos de primer y segundo orden

CONCLUSIONES

Se ha presentado un método asintótico para representar la respuesta no lineal de una estructura mediante series de potencias. Como se ve en los resultados el método funciona muy bien en problemas con no linealidad moderada usuales en la práctica ingenieril.

El método presentado tiene las siguientes ventajas frente a los métodos convencionales y simplificados que se usan en los programas comerciales:

- 1) Tiene convergencia asegurada, obviamente a medida que se aleja del origen de las series la respuesta se aleja de la exacta, aunque para problemas moderadamente no lineales la precisión es excelente.
- 2) Se trata de un método predictor puro (no utiliza correcciones de equilibrio) que requiere un número fijo de operaciones para obtener la solución, ya que solo es necesario resolver tres sistemas de ecuaciones lineales. Esto contrasta con los métodos iterativos convencionales, que no garantizan la obtención de una solución en un tiempo determinado.
- 3) Al no usar correcciones, no precisa que el usuario ingrese una tolerancia para los resultados, con las incertidumbres que ello conlleva.
- 4) No requiere de códigos o programas específicos para problemas no lineales ya que sólo usa las matrices convencionales de rigidez, esto es, se puede implementar con cualquier programa lineal de elementos finitos.
- 5) Es mucho más económico que los métodos implementados en programas comerciales sin perder precisión.

APÉNDICE

A continuación, presentamos las matrices de rigidez $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1(\mathbf{d}), \mathbf{K}_2(\mathbf{d}, \mathbf{d})$ de un elemento finito cuando la energía de deformación se calcula a partir de los tensores de deformación de Green-Lagrange.

El vector desplazamientos $\mathbf{d}$ se encuentra compuesto por los desplazamientos nodales $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$, con los sentidos mostrados en la figura 6. El elemento finito tiene longitud L , módulo de elasticidad E , inercia I y área A de la sección.

La matriz $\mathbf{K}_0$ es la clásica matriz de rigidez para vigas^{7,8}, que se expresa como:

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} c1 & 0 & 0 & -c1 & 0 & 0 \\ & c5 & c4 & 0 & -c5 & c4 \\ & & c3 & 0 & -c4 & c2 \\ & & & c1 & 0 & 0 \\ & & & & c5 & -c4 \\ & & & & & c3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Donde los coeficientes $c1$ a $c5$ valen

$$c1 = \frac{EA}{L} \quad c2 = 2 \frac{EI}{L} \quad c3 = 4 \frac{EI}{L} \quad c4 = 6 \frac{EI}{L^2} \quad c5 = 12 \frac{EI}{L^3} \quad (\text{A.2})$$

La matriz $\mathbf{K}_1(\mathbf{d})$ contiene términos lineales en desplazamientos y se puede expresar como

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} 0 & c12 & c11 & 0 & -c12 & c10 \\ & c9 & c8 & -c12 & -c9 & c8 \\ & & c7 & -c11 & -c8 & c6 \\ & & & 0 & c12 & -c10 \\ & & & & c9 & -c8 \\ & & & & & c7 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Donde los coeficientes $c6$ a $c12$ valen⁹

$$\begin{aligned} c6 &= \frac{EA}{30} (u_1 - u_2) \\ c7 &= -\frac{2EA}{15} (u_1 - u_2) \\ c8 &= -\frac{EA}{10L} (u_1 - u_2) \\ c9 &= \frac{6EA}{5L^2} (u_2 - u_1) \\ c10 &= \frac{EA}{10L} (v_2 - v_1) + \frac{EA}{30} (\theta_1 - 4\theta_2) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$c_{11} = \frac{EA}{10L}(v_2 - v_1) + \frac{EA}{30}(\theta_2 - 4\theta_1)$$

$$c_{12} = \frac{6EA}{5L^2}(v_2 - v_1) - \frac{EA}{10L}(\theta_1 + \theta_2)$$

La matriz $\mathbf{K}_2(\mathbf{d}, \mathbf{d})$ contiene términos cuadráticos en desplazamientos y se puede expresar como

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c_{13} & c_{14} & 0 & -c_{13} & c_{15} \\ & & c_{16} & 0 & -c_{14} & c_{18} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & c_{13} & -c_{15} \\ & & & & & c_{17} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Donde los coeficientes c_{13} a c_{18} valen⁹

$$\begin{aligned} c_{13} &= \frac{216EA}{35L^3}(v_1 - v_2)^2 + \frac{54EA}{35L^2}(v_1 - v_2)(\theta_1 + \theta_2) + \frac{9EA}{35L}(\theta_2^2 + \theta_1^2) \\ c_{14} &= \frac{27EA}{35L^2}(v_1 - v_2)^2 + \frac{18EA}{35L}(v_1 - v_2)\theta_1 + \frac{3EA}{140}(\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 - \theta_1^2) \\ c_{15} &= \frac{27EA}{35L^2}(v_1 - v_2)^2 + \frac{18EA}{35L}(v_1 - v_2)\theta_2 + \frac{3EA}{140}(\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 - \theta_2^2) \\ c_{16} &= \frac{9EA}{35L}(v_1 - v_2)^2 + \frac{3EA}{70}(v_1 - v_2)(\theta_2 - \theta_1) + \frac{EA}{70}(12\theta_1^2 - 3\theta_1\theta_2 + \theta_2^2) \\ c_{17} &= \frac{9EA}{35L}(v_1 - v_2)^2 + \frac{3EA}{70}(v_1 - v_2)(\theta_1 - \theta_2) + \frac{EA}{70}(12\theta_2^2 - 3\theta_1\theta_2 + \theta_1^2) \\ c_{18} &= \frac{3EA}{70}L(v_1 - v_2)(\theta_1 + \theta_2) - \frac{EA}{140}L^2(3\theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2 + 3\theta_2^2) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

REFERENCIAS

1. ANSI/AISC 360-22, Specification for structural steel buildings, American Institute of Steel Construction, Chicago, USA, (2022).
2. EUROCODE 3, Design of Steel Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, European Committee for Standardization (CEN), Brussels, (2009)
3. CIRSOC 301, Reglamento Argentino de Estructuras de Acero para Edificios, INTI-CIRSOC, (2018).
4. Thompson J.M.T. y Hunt G.W., (1973), *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, London.
5. Najah, A., B. Cochelin, N. Damil, y M. Potier-Ferry. A Critical Review of Asymptotic Numerical Methods. *Archives of Computational Methods in Engineering* 5, n.º 1 (1998): 31-50.

6. Jouglaard, Claudio E. *Análise Nao-linear Incremental Assintótica da Estabilidade de Estruturas Elásticas*. MSc. Thesis, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.
7. Bazant, Z. P., y Luigi Cedolin. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. World Scientific, 2010.
8. McGuire, William, Richard H. Gallagher, y Ronald D. Ziemian. *Matrix Structural Analysis*. 2.^a ed. Wiley, 2014.
9. Jouglaard, Claudio E., y Ana Liza Pérez. Análisis de Pórticos con Elementos Finitos con Imperfecciones Incluidas. 24 Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, 30 de septiembre de 2016, Paper 064.